

2. สมการและอสมการเอกซ์โพเนนเชียล

2.1 สมการและอสมการเอกซ์โพเนนเชียล

1. สมการเอกซ์โพเนนเชียล คือ สมการที่มีตัวแปรเป็นเลขชี้กำลัง และมีฐานเป็นค่าคงตัว

2. สมการเอกซ์โพเนนเชียล มี 2 ประเภท คือ

2.1 เป็นสมการที่แก้ไขโดยอาศัยคุณสมบัติ

$$\text{ถ้า } a^m = a^n \text{ แล้วจะได้ } m = n$$

2.2 เป็นสมการที่แก้ไขได้โดยต้องอาศัยความรู้เกี่ยวกับ ลอการิทึม (จะกล่าวในเรื่อง ลอการิทึม)

3. สมการเอกซ์โพเนนเชียลอีกแบบหนึ่งเป็นแบบที่ฐานไม่เท่ากัน แต่เลขชี้กำลังเท่ากัน สมการชนิดนี้ให้ทำเลขชี้กำลังนั้นเท่ากับ 0 เพราะจะสอดคล้องกับทฤษฎีที่ว่า

$$\text{ถ้า } a^n = b^n \text{ แล้ว } n = 0$$

ตัวอย่างที่ 1 จงหาเซตคำตอบของสมการ $8(2^{9x}) = (64)^{x+3}$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ} \quad 8(2^{9x}) &= (64)^{x+3} \\ (2^3)(2^{9x}) &= (2^6)^{x+3} \\ 2^{3+9x} &= 2^{6x+18} \\ \text{ดังนั้น} \quad 9x+3 &= 6x+18 \\ x &= 5 \end{aligned}$$

เซตคำตอบของสมการคือ $\{5\}$

ตัวอย่างที่ 2 จงหาเซตคำตอบของสมการ $3^{2x+3} - 55 = 28(3^x - 2)$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ} \quad 3^{2x+3} - 55 &= 28(3^x - 2) \\ 3^{2x+3} - 55 &= 28(3^x) - 56 \\ 3^3 \cdot 3^{2x} - 28(3^x) + 1 &= 0 \\ 27(3^x)^2 - 28(3^x) + 1 &= 0 \\ (27 \cdot 3^x - 1)(3^x - 1) &= 0 \\ \begin{array}{l|l} (27 \cdot 3^x - 1) = 0 & 3^x - 1 = 0 \\ 3^x = \frac{1}{27} & 3^x = 1 \\ 3^x = 3^{-3} & 3^x = 3^0 \\ x = -3 & x = 0 \end{array} \end{aligned}$$

เซตคำตอบของสมการ คือ $\{-3, 0\}$

2.2 อสมการเอกซ์โพเนนเชียล

หลักทั่วไปในการแก้สมการ ให้ใช้ความรู้เกี่ยวกับฟังก์ชันเพิ่ม และฟังก์ชันลดของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล คือ

1. ถ้า $a > 1$ แล้ว $a^m > a^n$ ก็ต่อเมื่อ $m > n$
2. ถ้า $0 < a < 1$ แล้ว $a^m > a^n$ ก็ต่อเมื่อ $m < n$

ตัวอย่างที่ 3 จงหาเซตคำตอบของอสมการ $2^{x+2} < \frac{1}{32}$

วิธีทำ
$$2^{x+2} < \frac{1}{32}$$
$$2^{x+2} < 2^{-5}$$

เนื่องจากเป็นฟังก์ชันเพิ่ม ดังนั้น

$$x+2 < -5$$
$$x < -5 - 2$$
$$x < -7$$

$$\text{ดังนั้นเซตคำตอบ} = \{x \mid x < -7\}$$

$$\text{หรือ } (-\infty, -7)$$

แบบฝึกหัดที่ 2

1. จงหาคำตอบของสมการต่อไปนี้

$$1) 9(3^x) = 27^2$$

$$2) \left(\frac{3}{2}\right)^{2x} = \left(\frac{8}{27}\right)^{-4}$$

$$3) 5^{x+1} = 7^{x+1}$$

$$4) 4^x - 2^x - 2 = 0$$



5) $4^{2x} - 6(4^x) + 8 = 0$

6) $3^{2x+1} - 3^x = 3^{x+3} - 9$

7) $5^{6x+4} + 10 = 6(5^{3x+2}) + 5$

8) $2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} + 2^{x+3} = 60$

9) $2(2^x + 2^{-x}) = 5$

10) $5^{4x} + 25 = 5^{3x+1} + 5^{x+1}$



2. จงหาคำตอบของอสมการต่อไปนี้

1) $\left(\frac{1}{2}\right)^{4x} < 8$

2) $2^{\sqrt{x-3}} - 2 > 0$

3) $(\sqrt{x})^{x^2} \leq (\sqrt{x})^{x+6}$

4) $\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2+3x} < \left(\frac{9}{4}\right)$

5) $2^{x-x^2} < \frac{1}{64}$

6) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2+4x-10} < 3^{x^2+x-2}$