

3. ฟังก์ชันตรีโกณมิติของสามเท่าของจำนวนจริงหรือมุม

เราสามารถรู้เรื่อง $\sin(A+B)$, $\cos(A+B)$ และ $\tan(A+B)$ ช่วยในการหาค่าของ $\sin 3A$, $\cos 3A$ และ $\tan 3A$ ได้ ดังรายละเอียดต่อไปนี้

จงพิสูจน์ให้เห็นว่าแต่ละข้อต่อไปนี้จริง

$$1. \sin 3A = 3\sin A - 4\sin^3 A$$

$$\begin{aligned} \text{จาก } \sin 3A &= \sin(2A + A) \\ &= \sin 2A \cos A + \cos 2A \sin A \\ &= (2\sin A \cos A)\cos A + (1 - 2\sin^2 A)\sin A \\ &= 2\sin A \cos^2 A + \sin A - 2\sin^3 A \\ &= 2\sin A (1 - \sin^2 A) + \sin A - 2\sin^3 A \\ &= 2\sin A - 2\sin^3 A + \sin A - 2\sin^3 A \\ &= 3\sin A - 4\sin^3 A \end{aligned}$$

*** ส่วนสูตรที่เหลือ ให้นักเรียนลองพิสูจน์เอง ***

กำหนดให้ A เป็น จำนวนจริง หรือมุมใด ๆ

$$\begin{aligned} \sin 3A &= 3\sin A - 4\sin^3 A \\ \cos 3A &= 4\cos^3 A - 3\cos A \\ \tan 3A &= \frac{3\tan A - \tan^3 A}{1 - 3\tan^2 A} \\ \cot 3A &= \frac{\cot^3 A - 3\cot A}{3\cot^2 A - 1} \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 1 กำหนด $\cos A = \frac{1}{3}$ จงหาค่าของ $\cos 3A$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ } \text{จาก } \cos 3A &= 4\cos^3 A - 3\cos A \\ &= 4\left(\frac{1}{3}\right)^3 - 3\left(\frac{1}{3}\right) \\ &= \frac{4}{27} - 1 \\ &= -\frac{23}{27} \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 2 จงพิสูจน์ว่า $\frac{3\cos A + \cos 3A}{3\sin A - \sin 3A} = \cot^3 A$

$$\text{วิธีทำ } \text{จาก } \frac{3\cos A + \cos 3A}{3\sin A - \sin 3A} = \frac{3\cos A + (4\cos^3 A - 3\cos A)}{3\sin A - (3\sin A - 4\sin^3 A)}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{4\cos^3 A}{4\sin^3 A} \\ &= \cot^3 A \end{aligned}$$



1. กำหนด $\sin A = \frac{1}{2}$ จงหาค่าของ $\sin 3A$

2. กำหนด $\tan A = 3$ จงหาค่าของ $\tan 3A$

3. จงหาค่าของ $\frac{\cos^3 \theta - \cos 3\theta}{\cos \theta} + \frac{\sin^3 \theta + \sin 3\theta}{\sin \theta}$

4. จงหาค่าของ $3(\sin 20^\circ + \sin 40^\circ) - 4(\sin^3 20^\circ + \sin^3 40^\circ)$

5. กำหนด $\tan A = \frac{1}{2}$ จงหาค่าของ $\frac{3\cos A + \cos 3A}{3\sin A - \sin 3A}$