

8. เอกลักษ์ณของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

เอกลักษ์ณ คือสมการตรีโกณมิติที่เป็นจริงเสมอ ไม่ว่าจะแทนที่ตัวแปรด้วยจำนวนจริงใด ๆ ก็ตาม (การแทนที่ตัวแปรด้วยจำนวนจริงนั้น ต้องทำให้แต่ละพจน์มีความหมายด้วย)

การพิสูจน์เอกลักษ์ณ คือการพิสูจน์ให้เห็นจริงว่า กลุ่มพจน์ด้านซ้ายมือและกลุ่มพจน์ด้านขวามือของเครื่องหมายเท่ากับ เท่ากันเสมอทุก ๆ ค่าของตัวแปร

การพิสูจน์เอกลักษ์ณ จะต้องอาศัยเอกลักษ์ณ (คือสูตรตรีโกณมิตินั่นเอง) ที่ได้มีการพิสูจน์มาแล้วมาอ้างอิง และหลักทั่ว ๆ ไป ในการพิสูจน์เอกลักษ์ณ มีดังนี้

1. ให้พิสูจน์จากด้านที่ยู้งยากไปหาด้านที่ง่ายกว่า
2. ควรจะเปลี่ยนฟังก์ชันตรีโกณมิติที่โจทย์กำหนดให้เป็นฟังก์ชัน sine หรือ cosine จะทำให้

การพิสูจน์เอกลักษ์ณง่ายขึ้น

** การพิสูจน์เอกลักษ์ณขึ้นอยู่กับประสบการณ์ ดังนั้นนักเรียนควรที่จะฝึกฝนการพิสูจน์ให้มากเข้าไว้ และเอกลักษ์ณบางเอกลักษ์ณก็อาจจะมีวิธีพิสูจน์ได้หลายวิธี

ตัวอย่างที่ 1 จงพิสูจน์เอกลักษ์ณ $\sec A - \cos A = \tan A \sin A$

$$\begin{aligned}\sec A - \cos A &= \frac{1}{\cos A} - \cos A \\ &= \frac{1 - \cos^2 A}{\cos A} \\ &= \frac{\sin^2 A}{\cos A} \\ &= \frac{\sin A}{\cos A} \times \sin A \\ &= \tan A \sin A\end{aligned}$$

จะได้ $\sec A - \cos A = \tan A \sin A$

ตัวอย่างที่ 2 จงพิสูจน์ $\sin A + \sin 3A + \sin 5A + \sin 7A = 4 \cos A \sin 4A \cos 2A$

$$\begin{aligned}\sin A + \sin 3A + \sin 5A + \sin 7A &= (\sin A + \sin 3A) + (\sin 5A + \sin 7A) \\ &= 2 \sin 2A \cos A + 2 \sin 6A \cos A \\ &= 2 \cos A (\sin 2A + \sin 6A) \\ &= 2 \cos A (2 \sin 4A \cos 2A) \\ &= 4 \cos A \sin 4A \cos 2A\end{aligned}$$

จะได้ $\sin A + \sin 3A + \sin 5A + \sin 7A = 4 \cos A \sin 4A \cos 2A$



จงพิสูจน์เอกลักษณ์ต่อไปนี้

1. $\sin 4\theta = 4 \sin \theta \cos \theta \cos 2\theta$

2. $\frac{2 \tan A}{\tan 2A} = 2 \sec^2 A$

3. $\sec \theta - \cos \theta = \tan \theta \sin \theta$

4. $\cot \theta + \tan \theta = \sec \theta \operatorname{cosec} \theta$



$$5. \frac{\cos A}{1 - \sin A} - \frac{1 + \sin A}{\cos A} = 0$$

$$6. 1 - \sin^2 \theta + \tan^2 \theta - \tan^2 \theta \sin^2 \theta = 1$$

$$7. \frac{2 \sin A \cos A - \cos A}{1 - \sin A + \sin^2 A - \cos^2 A} = \cot A$$

$$8. \frac{\sin (A+B)}{\cos A \cos B} = \tan A + \tan B$$



$$9. \frac{\sin 2A}{1 + \cos 2A} = \tan A$$

$$10. \frac{\sin 3A + \sin^3 A}{\cos^3 A - \cos 3A} = \cot A$$

$$11. \sec^4 A - \sec^2 A = \tan^4 A + \tan^2 A$$

$$12. \frac{\cos 4x + \cos 2x}{\sin 4x + \sin 2x} = \cot 3x$$