



9. สมการตรีโกณมิติ

สมการตรีโกณมิติ หมายถึงสมการที่ประกอบด้วยพจน์ที่อยู่ในรูปฟังก์ชันตรีโกณมิติของตัวแปร ซึ่งแยกเป็น 2 ประเภท คือ

1. สมการเอกลักษณ์ หมายถึงสมการที่เป็นจริง เมื่อแทนตัวแปรด้วยจำนวนจริงใด ๆ ซึ่งทำให้พจน์แต่ละพจน์ในสมการเป็นจริงเสมอ เช่น

$$\begin{aligned}\sin^2 x + \cos^2 x &= 1 \\ 1 + \tan^2 x &= \sec^2 x\end{aligned}$$

2. สมการมีเงื่อนไข หมายถึงสมการที่ไม่ใช่สมการเอกลักษณ์ คือมีจำนวนจริงบางจำนวน หรืออาจไม่มีจำนวนจริงใดเป็นคำตอบของสมการ เช่น

$$\begin{aligned}\sin x &= 1 \\ \cos x &= 0\end{aligned}$$

คำตอบที่ได้จากการแก้สมการตรีโกณมิติจะมี 2 แบบ คือ

1. แบบจำกัด โจทย์มักกำหนดช่วงของตัวแปรมาให้
2. แบบทั่วไป โจทย์ไม่ได้บ่งบอกว่าให้คำตอบอยู่ในช่วงใดช่วงหนึ่ง ซึ่งมีการตอบ 2 แบบ

คือ - แบบทั่วไปแบบแยกตอบ
- แบบทั่วไปแบบรวมตอบ

ตัวอย่างที่ 1 จงหาคำตอบของสมการ $\tan \theta \sin \theta + \tan \theta = 0$ เมื่อ $0 \leq \theta \leq 2\pi$

$$\begin{aligned}\tan \theta \sin \theta + \tan \theta &= 0 \\ \tan \theta (\sin \theta + 1) &= 0\end{aligned}$$

ถ้า	$\tan \theta = 0$	หรือ	$\sin \theta + 1 = 0$
	$\tan \theta = \tan 0, \tan \pi$		$\sin \theta = -1$
	$\theta = 0, \pi$		$\theta = \frac{3\pi}{2}$

จะได้ $\theta = 0, \pi, \frac{3\pi}{2}$ แต่เนื่องจาก $\tan \frac{3\pi}{2}$ หาค่าไม่ได้

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการคือ $\{x/x = 0, \pi\}$

ตัวอย่างที่ 2 จงหาค่า θ จากสมการ $2 \sin^2 \theta - \cos \theta - 1 = 0$

$$\begin{aligned}2 \sin^2 \theta - \cos \theta - 1 &= 0 \\ 2(1 - \cos^2 \theta) - \cos \theta - 1 &= 0 \\ 2 \cos^2 \theta + \cos \theta - 1 &= 0 \\ (2 \cos \theta - 1)(\cos \theta + 1) &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{array}{lcl} \text{ถ้า } 2 \cos \theta - 1 & = & 0 \qquad \qquad \text{หรือ} \qquad \cos \theta + 1 = 0 \\ \cos \theta & = & \frac{1}{2} \qquad \qquad \qquad \qquad \cos \theta = -1 \\ \theta & = & \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} \qquad \qquad \qquad \theta = \pi \end{array}$$

ดังนั้น คำตอบของสมการนี้ในช่วง $[0, 2\pi)$ คือ $\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \pi$

คำตอบทั่วไปแบบแยกตอบ คือ $2n\pi + \frac{\pi}{3}, 2n\pi + \frac{5\pi}{3}, 2n\pi + \pi$

คำตอบทั่วไปแบบรวมตอบ คือ $n\pi \pm \frac{\pi}{3}, 2n\pi \pm \pi$



จงแก้สมการ

1. $\sin x - 2 \sin x \cos x = 0$

2. $\sin 5x + \sin x = \sin 3x$



$$3. \quad 3 \sec \theta - \cos \theta + 2 = 0$$

$$4. \quad \sqrt{3} \operatorname{cosec}^2 \theta + 2 \operatorname{cosec} \theta = 0$$

$$5. \quad \cot x + 2 \sin x = \operatorname{cosec} x$$

$$6. \quad 4 \tan^2 \theta - 3 \sec^2 \theta = 0$$



$$7. \cos x + 4\sin x - \sin 2x = 2$$

$$8. 1 + \sqrt{3} \tan^2 x = (1 + \sqrt{3}) \tan x$$

$$9. \sin 3x + \sin 2x = 0$$

$$10. \sin^2 x - 2 \sin x \cos x - \cos^2 x = 1$$



$$11. (\tan \theta - 1)(4 \sin^2 \theta - 3) = 0$$

$$12. \cot x + \tan x = 2 \sec x$$

$$13. \sin x \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{2} \cos x$$

$$14. \cos 2x + \sin^2 \frac{x}{2} = 1$$