บทที่ 1
ความน่าจะเป็น (Probability)

ผลการเรียนรู้

1. แก้โจทย์ปัญหาโดยใช้กฎเกณฑ์เบื้องต้นเกี่ยวกับการนับ วิธีเรียงสับเปลี่ยนและวิธีจัดหมู่
2. นำความรู้เรื่องทฤษฎีบททวินามไปใช้ได้
3. หาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่กำหนดให้ได้

สาระ/เนื้อหา

ตอนที่ 1 วิธีเรียงสับเปลี่ยนและวิธีจัดหมู่

- 1.1 กฎเกณฑ์เบื้องต้นเกี่ยวกับการนับ
- 1.2 แฟกทอเรียล n
- 1.3 วิธีเรียงสับเปลี่ยน
- 1.4 วิธีเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของเป็นวงกลม
- 1.5 วิธีเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของที่ไม่แตกต่างกันทั้งหมด
- 1.6 วิธีจัดหมู่
- 1.7 ทฤษฎีบททวินาม

ตอนที่ 2 ทฤษฎีเบื้องต้นของความน่าจะเป็น

- 2.1 การทดลองสุ่มและปริภูมิตัวอย่าง(แซมเปิลสเปซ)
- 2.2 เหตุการณ์
- 2.3 ความน่าจะเป็น
- 2.4 กฎที่สำคัญบางประการของความน่าจะเป็น

ตอนที่ 1 วิธีเรียงสับเปลี่ยนและวิธีจัดหมู่

1.1 กฎเกณฑ์เบื้องต้นเกี่ยวกับการนับ

ในชีวิตประจำวันเรามักจะพบปัญหาเกี่ยวกับการนับจำนวนวิธีทั้งหมดที่เหตุการณ์อย่างใดอย่างหนึ่งจะเป็นไปได้ หรือจำนวนวิธีในการจัดชุดของสิ่งต่างๆเช่น การจัดการแข่งขันกีฬา การจัดชุดเสื้อผ้า การจัดชุดอาหาร เป็นต้น การคำนวณเพื่อหาคำตอบสำหรับปัญหาประเภทต่างๆดังกล่าว จะทำได้ง่ายและสะดวกรวดเร็วขึ้นถ้าเข้าใจกฎเกณฑ์บางข้อซึ่งเรียกว่า หลักมูลฐานเกี่ยวกับการนับ

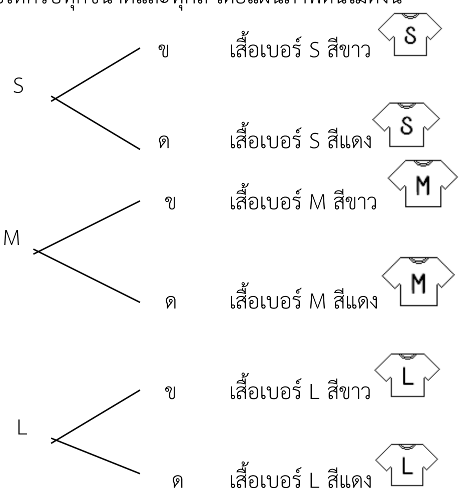
พิจารณาปัญหาเกี่ยวกับการจัดสิ่งของต่างๆดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1 ร้านค้าแห่งหนึ่งต้องการจัดโชว์เสื้อกีฬาทุกขนาดและทุกสี ถ้ามีเสื้อ 3 ขนาดและแต่ละขนาดมี 2 สี คือ สีขาวกับสีแดงจะต้องจัดอย่างไร

วิธีทำ ในการแก้ปัญหาข้างต้นอาจจะใช้แผนภาพต้นไม้ช่วยในการคิดให้ง่ายขึ้นดังนี้

ให้ ข แทนเสื้อสีขาว
ด แทนเสื้อสีแดง
S แทนเสื้อขนาดเล็กหรือเบอร์ S
M แทนเสื้อขนาดกลางหรือเบอร์ M
L แทนเสื้อขนาดใหญ่หรือเบอร์ L

หาวิธีการจัดเสื้อให้ครบทุกขนาดและทุกสี โดยแผนภาพต้นไม้ดังนี้



จากแผนภาพ จะเห็นได้ว่า จะต้องจัดเสื้อแต่ละขนาดให้ครบทั้งสองสี โดยจะมีเสื้อทั้งหมด 6 ตัว ซึ่งเท่ากับผลคูณของจำนวนขนาดของเสื้อ (3) คูณด้วยจำนวนสีของเสื้อ (2) หรือเท่ากับ 3x2 หรือ 6 นั่นเอง

ตัวอย่างที่ 2 โรงเรียนแห่งหนึ่งจัดอาหารกลางวันเป็นอาหารคาว 4 อย่าง และขนม 3 อย่าง ให้นักเรียนเลือกรับประทานชนิดละอย่าง อยากทราบว่า นักเรียนจะมีวิธีเลือกอาหารคาวและขนมได้ทั้งหมดกี่วิธี

วิธีทำ สมมุติให้อาหารคาว 4 อย่างเป็น ค$_1$,ค$_2$,ค$_3$,ค$_4$ และ

สมมุติให้ขนม 3 อย่างเป็น ข$_1$,ข$_2$,ข$_3$

เราอาจใช้แผนภาพต้นไม้ช่วยในการคิดดังนี้

ค$_1$	ข$_1$	ค$_1$ และ ข$_1$	(1)
	ข$_2$	ค$_1$ และ ข$_2$	(2)
	ข$_3$	ค$_1$ และ ข$_3$	(3)
ค$_2$	ข$_1$	ค$_2$ และ ข$_1$	(4)
	ข$_2$	ค$_2$ และ ข$_2$	(5)
	ข$_3$	ค$_2$ และ ข$_3$	(6)
ค$_3$	ข$_1$	ค$_3$ และ ข$_1$	(7)
	ข$_2$	ค$_3$ และ ข$_2$	(8)
	ข$_3$	ค$_3$ และ ข$_3$	(9)
ค$_4$	ข$_1$	ค$_4$ และ ข$_1$	(10)
	ข$_2$	ค$_4$ และ ข$_2$	(11)
	ข$_3$	ค$_4$ และ ข$_3$	(12)

ดังนั้น มีวิธีเลือกอาหารกลางวันได้ทั้งหมด 12 วิธี

จะเห็นว่า จำนวนวิธีที่จะเลือกอาหารกลางวันซึ่งประกอบด้วยอาหารคาว 1 อย่างและขนมอีก 1 อย่าง จะเท่ากับผลคูณของจำนวนชนิดของอาหารคาวซึ่งมี 4 อย่าง และจำนวนชนิดของขนมซึ่งมี 3 อย่างนั่นเอง ซึ่งเมื่อเข้าใจวิธีคิดแล้ว จะใช้วิธีคิดที่ใช้การคูณได้ดังนี้

มีวิธีเลือกอาหารคาวได้ 4 วิธี และในแต่ละวิธีที่เลือกอาหารคาวจะเลือกขนมได้อีก 3 วิธี ดังนั้น จำนวนวิธีทั้งหมดที่จะเลือกอาหารกลางวันเท่ากับ 4 X 3 = 12 วิธี

ในกรณีทั่วไป สรุปเป็นกฎได้ดังนี้

> **กฎข้อที่ 1** ถ้าต้องการทำงานสองอย่างโดยที่งานอย่างแรกทำได้ n_1 วิธี และในแต่ละวิธีที่เลือกทำงานอย่างแรกนี้ มีวิธีที่จะทำงานอย่างที่สองได้ n_2 วิธี จะทำงานทั้งสองอย่างนี้ได้ $n_1 n_2$ วิธี

ตัวอย่างที่ 3 ระหว่างท่าข้ามสองฝั่งแม่น้ำมีเรือยนต์ข้ามฟากแล่นอยู่ 3 ลำ จงหาจำนวนวิธีทั้งหมดที่ผู้โดยสารคนหนึ่งจะข้ามฟากโดยที่เที่ยวไปและเที่ยวกลับลงเรือไม่ซ้ำลำกัน

วิธีทำ เนื่องจากมีเรือข้ามฟากแล่นอยู่ 3 ลำ ในเที่ยวไปเขาจึงมีวิธีเลือกลงเรือได้ 3 วิธี และในเที่ยวกลับไม่ต้องการลงเรือซ้ำกับเรือลำที่ลงเมื่อเที่ยวไป ฉะนั้น ในแต่ละวิธีของเที่ยวไปเขาจึงมีวิธีเลือกเรือเที่ยวกลับได้ 2 ลำ หรือ 2 วิธี

ดังนั้น เขาจะข้ามฟากโดยที่เที่ยวไปและเที่ยวกลับลงเรือไม่ซ้ำลำกัน ได้ทั้งสิ้น 3 x 2 = 6 วิธี

ตัวอย่างที่ 4 ในการทอดลูกเต๋าสองลูก จะปรากฏผลได้ทั้งหมดกี่วิธี

วิธีทำ ในการทอดลูกเต๋าแต่ละลูก อาจได้แต้มต่างๆดังนี้คือ 1, 2, 3, 4, 5 หรือ 6

ผลที่ได้จากการทอดลูกเต๋าลูกแรกจึงมี 6 วิธี

ในแต่ละวิธีของผลที่ได้จากการทอดลูกเต๋าลูกแรกจะปรากฏผลของการทอดลูกเต๋าลูกที่สองได้อีก 6 วิธี ดังนั้น การทอดลูกเต๋าทั้งสองลูกปรากฏผลได้ทั้งหมด 6 x 6 = 36 วิธี

โดยการขยายกฎข้อที่ 1 ให้ใช้กับการทำงานหรือปฏิบัติการมากกว่า 2 อย่าง จะได้กฎเกณฑ์ทั่ว ๆ ไป สำหรับการคำนวณจำนวนวิธีทั้งหมดสำหรับการทำงาน k อย่าง สรุปได้เป็นกฎข้อที่ 2 ดังนี้

> **กฎข้อที่ 2** ถ้าต้องการทำงานอย่างหนึ่งมี k ขั้นตอน ขั้นตอนที่หนึ่งมีวิธีเลือกทำได้ n_1 วิธี ในแต่ละวิธีของขั้นตอนที่หนึ่งมีวิธีเลือกทำขั้นตอนที่สองได้ n_2 วิธี ในแต่ละวิธีที่เลือกทำงานขั้นตอนที่หนึ่งและขั้นตอนที่สองมีวิธีเลือกทำขั้นตอนที่สามได้ n_3 วิธี เช่นนี้เรื่อยไปจนถึงขั้นตอนสุดท้ายคือ ขั้นตอนที่ k ทำได้ n_k วิธี จำนวนวิธีทั้งหมดที่จะเลือกทำงาน k อย่าง เท่ากับ $n_1 n_2 n_3 \ldots n_k$ วิธี

ตัวอย่างที่ 5 ถ้าต้องการทำป้ายเพื่อแสดงแบบ สี และขนาด ของรอยเท้ากีฬา 6 แบบ แต่ละแบบมี 3 สี และแต่ละสีมี 5 ขนาด จะต้องจัดป้ายที่ต่างกันทั้งหมดกี่ป้ายจึงจะครบทุกแบบ สี และ ขนาด

วิธีทำ รองเท้ากีฬามีทั้งหมด 6 แบบ

รองเท้าแต่ละแบบมี 3 สี

รองเท้าแต่ละสีมี 5 ขนาด

ดังนั้น จำนวนป้ายที่แสดง แบบ สี และขนาด จะต้องมี 6 x 3 x 5 หรือ 90 แบบ

ตัวอย่างที่ 6 จำนวนคู่บวกซึ่งมีสามหลักมีทั้งหมดกี่จำนวน

วิธีทำ เลขโดดที่ใช้ในการเขียนตัวเลขแสดงจำนวนที่ต้องการในหลักทั้งสามต่างก็เป็นสมาชิกของเซต $S = \{0,1,2,3,\ldots,9\}$

การเลือกเลขโดดมาใช้เขียนในหลักร้อยเป็นได้ 9 วิธี คือ จะเป็นสมาชิกตัวใดตัวหนึ่งของ S ก็ได้ ยกเว้น 0

การเลือกเลขโดดในหลักสิบเป็นได้ 10 วิธี คือ จะเป็นสมาชิกตัวใดตัวหนึ่งของ S ก็ได้

เนื่องจากจำนวนคู่ใด ๆ ต้องมีเลขโดดในหลักหน่อยเป็นจำนวนคู่เสมอ ดังนั้น การเลือกเลขโดดในหลักหน่วยจึงเป็นได้เพียง 5 วิธี คือจะเป็น 0, 2, 4, 6 หรือ 8

จะได้ว่า จำนวนคู่ที่มีสามหลักมีทั้งหมด 9 x 10 x 5 = 450 จำนวน

ตัวอย่างที่ 7 ถ้าในการกำหนดเลขทะเบียนรถยนต์จะต้องใช้พยัญชนะนำหน้า 2 ตัว (ซ้ำกันได้) จากพยัญชนะทั้งหมด 44 ตัว และกำหนดให้มีตัวเลขไม่เกิน 4 หลัก ถ้ากำหนดแบบป้ายทะเบียนเป็นสี่แบบดังนี้

1) มีตัวเลข 1 หลัก (จาก 1 ถึง 9)
2) มีตัวเลข 2 หลัก (จาก 10 ถึง 99)
3) มีตัวเลข 3 หลัก (จาก 100 ถึง 999)
4) มีตัวเลข 4 หลัก (จาก 1000 ถึง 9999)

อยากทราบว่า จะออกป้ายทะเบียนรถยนต์ได้แบบละกี่ป้าย

วิธีทำ พยัญชนะที่เป็นตัวเลือกแต่ละตัว เลือกได้ 44 วิธี รวมวิธีเลือกพยัญชนะได้ทั้งหมด 44 x 44 หรือ 1936 วิธี

1) ป้ายทะเบียนที่ประกอบด้วยพยัญชนะ 2 ตัว และตัวเลข 1 หลัก
   จะมีได้ 1936 x 9 ป้าย หรือ 17,424 ป้าย
2) ป้ายทะเบียนที่ประกอบด้วยพยัญชนะ 2 ตัว และตัวเลข 2 หลัก
   จะมีได้ 1936 x 9 x 10 ป้าย หรือ 174,240 ป้าย
3) ป้ายทะเบียนที่ประกอบด้วยพยัญชนะ 2 ตัว และตัวเลข 3 หลัก
   จะมีได้ 1936 x 9 x 10 x 10 ป้าย หรือ 17,424,400 ป้าย
4) ป้ายทะเบียนที่ประกอบด้วยพยัญชนะ 2 ตัว และตัวเลข 4 หลัก
   จะมีได้ 1936 x 9 x 10 x 10 x 10 ป้าย หรือ 17,424,000 ป้าย

ตัวอย่างที่ 8 บริษัทแห่งหนึ่ง กำหนดให้มีรหัสประจำตัวพนักงาน ซึ่งประกอบด้วย ตัวอักษรภาษาอังกฤษ 1 ตัว และเลขโดด 3 ตัว ตัวอย่างเช่น A - 001 อยากทราบว่ารหัสประจำตัวของพนักงานในบริษัทนี้จะมีได้ทั้งหมดกี่รหัส ถ้า

ก) รหัสประจำตัวพนักงานต้องไม่มีเลขโดดที่ซ้ำกัน

ข) รหัสประจำตัวพนักงานมีเลขโดดที่ซ้ำกัน

วิธีทำ ก) พิจารณาเงื่อนไขในการกำหนดรหัสดังนี้

1) เนื่องจากอักษรภาษาอังกฤษมีให้เลือกทั้งหมด 26 ตัว
   ดังนั้น จะมีวิธีเลือกรหัสตัวแรกได้ทั้งหมด 26 วิธี
   หรือ สร้างรหัสประจำตัวของพนักงานได้ (26)_ _ _ รหัส

2) รหัสสามตัวถัดไปจะต้องเป็นเลขโดดที่ไม่ซ้ำกัน
   ดังนั้น จะมีวิธีเลือกเลขโดดตัวแรกได้ 10 วิธี
   หรือ สร้างรหัสประจำตัวของพนักงานได้ (26)(10) _ _ รหัส
   จะมีวิธีเลือกเลขโดดตัวที่สองที่ไม่ซ้ำกับตัวแรกได้ 9 วิธี
   หรือ สร้างรหัสประจำตัวของพนักงานได้ (26)(10)(9) _ รหัส
   จะมีวิธีเลือกเลขโดดตัวที่สามที่ไม่ซ้ำกับสองตัวแรกได้ 8 วิธี
   หรือ สร้างรหัสประจำตัวของพนักงานได้ (26)(10)(9)(8) รหัส
   นั่นคือ จะมีวิธีกำหนดรหัสพนักงานได้ทั้งหมด (26)(10)(9)(8) วิธี
   หรือมีรหัสได้ทั้งหมด 18,720 รหัส

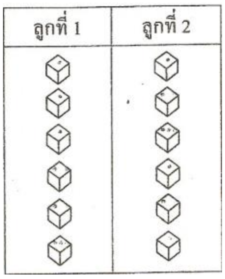
ข) เนื่องจากรหัสที่เป็นเลขโดดซ้ำกันได้

ดังนั้น รหัสที่เป็นเลขโดดแต่ละตัวจะเป็นเลขโดดตัวใดก็ได้ โดยเลือกจาก 0-9 ซึ่งมีทั้งหมด 10 วิธี

นั่นคือ มีรหัสที่มีเลขโดดซ้ำกันได้ (26)(10)(10)(10) = 26,000 รหัส

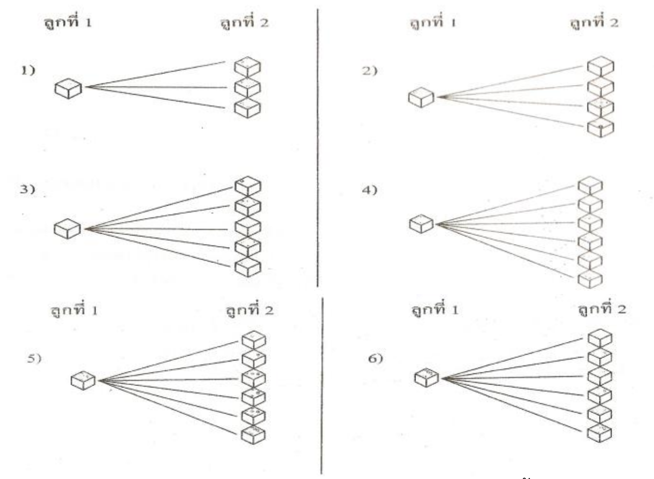
ตัวอย่างที่ 9 ถ้าทอดลูกเต๋าสองลูกพร้อมกัน จงหาจำนวนวิธีที่ผลบวกของแต้มบนหน้าลูกเต๋าทั้งสองจะมากกว่า 4

วิธีที่ 1 เนื่องจากผลบวกบนหน้าลูกเต๋าสองลูกได้จาก แต้มบนหน้าลูกเต๋าแต่ละลูก ซึ่งสามารถเกิดได้ทั้งหมดมี 6 x 6 หรือ 36 วิธี และผลบวกบนหน้าลูกเต๋าที่น้อยกว่าหรือเท่ากับ 4 เกิดขึ้นได้จากแต้มบนหน้าลูกเต๋าดังนี้



จากตาราง จะเห็นว่ามีวิธีที่ผลบวกบนหน้าลูกเต๋าทั้งสองลูกที่น้อยกว่า หรือเท่ากับ 4 ได้ทั้งหมด 6 วิธี
ดังนั้น จำนวนวิธีผลบวกของแต้มบนหน้าลูกเต๋า จะมากกว่า 4 จะเท่ากับ 36 – 6 = 30 วิธี

วิธีที่ 2 หาจำนวนวิธีที่ผลบวกของแต้มบนหน้าลูกเต๋าทั้งสอง จะมากกว่า 4 ได้ดังนี้



จากแผนภาพ จะเห็นว่า จำนวนวิธีที่ผลบวกของแต้มบนหน้าลูกเต๋าทั้งสองลูก จะมากกว่า 4 มีได้ทั้งหมด 3 + 4 + 5 + 6 + 6 + 6 = 30 วิธี

วิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม ค33202 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2563

แบบฝึกหัด 1.1

1. มีถนนจากกรุงเทพฯ ถึงลพบุรี 3 สาย และมีถนนจากลพบุรีถึงนครราชสีมา 4 สาย ถ้าจะขับรถยนต์จากกรุงเทพฯ ถึงนครราชสีมาโดยขับผ่านจังหวัดลพบุรี จะใช้เส้นทางที่ต่างกันได้ทั้งหมดกี่เส้นทาง เขียนแผนภาพแสดงการเดินทางเพื่อประกอบคำตอบด้วย

2. เมื่อโยนเหรียญหนึ่งเหรียญ เหรียญอาจขึ้นหัวหรือก้อยก็ได้ ถ้าโยนเหรียญบาท 3 เหรียญจะได้ผลต่าง ๆ กันทั้งหมดกี่วิธี อะไรบ้าง เขียนแผนภาพต้นไม้แสดงคำตอบด้วย

3. บริษัทผู้ผลิตเสื้อผ้าสำเร็จรูปบริษัทหนึ่งผลิตเสื้อ 4 แบบ แต่ละแบบมี 6 สี และแต่ละสีมีขนาดต่างกัน 3 ขนาด ถ้าจะจัดเข้าตู้โชว์หน้าร้านให้ครบทุกแบบ ทุกสีและทุกขนาดจะต้องใช้เสื้อทั้งหมดกี่ตัว

4. ข้อสอบประเภทให้เลือกตอบว่าจริงหรือเท็จชุดหนึ่งมี 10 ข้อ นักเรียนที่ทำข้อสอบนี้จะมีวิธีตอบข้อสอบชุดนี้ได้ต่าง ๆ กันกี่วิธี สมมุติว่าต้องตอบคำถามทุกข้อโดยไม่มีการเว้น

....
....
....
....
....
....
....
....

5. หมายเลขโทรศัพท์ซึ่งประกอบด้วยเลขโดด 9 ตัว และห้าตัวแรกเป็น 02392 มีได้ทั้งหมดกี่หมายเลข

....
....
....
....
....
....

6. สนามกีฬาแห่งหนึ่งมีประตูอยู่ 4 ประตู ถ้าจะเข้าประตูหนึ่งแล้วออกอีกประตูหนึ่งไม่ให้ซ้ำกับประตูที่เข้ามา จะมีวิธีเข้าและออกจากสนามกีฬาแห่งนี้ได้ทั้งหมดกี่วิธี

....
....
....
....
....
....

7. ในการทอดลูกเต๋าสองลูกพร้อม ๆ กัน จงหาจำนวนวิธีที่จะได้ผลลัพธ์เหล่านี้

1) จำนวนแต้มตรงกัน　　　　3) จำนวนแต้มต่างกัน

2) ผลรวมของแต้มเท่ากับสิบ　　　　4) ผลรวมของแต้มน้อยกว่าสิบ

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

8. จงหาว่า จากเลขโดด 0 – 9 จะมีวิธีเขียนตัวเลขแสดงจำนวนต่อไปนี้ได้กี่วิธี โดยให้เลขโดดในแต่ละหลักซ้ำกันได้

1) จำนวนเต็มบวกที่มีสี่หลัก
2) จำนวนคี่บวกที่มีสี่หลัก
3) จำนวนที่มีสี่หลักที่หลักหน่วยเป็นศูนย์

9. เดิมหมายเลขทะเบียนรถยนต์ในกรุงเทพมหานครประกอบด้วยตัวอักษรย่อชื่อจังหวัด พยัญชนะอีก 1 ตัว และเลขโดดตามหลังอีก 4 ตัว เช่น กท.อ. 0278 จงหาว่า กองทะเบียนจะใช้ระบบนี้ออกทะเบียนให้รถยนต์ได้ทั้งหมดกี่คัน (สมมุติว่าพยัญชนะครบทุกตัว) และถ้ากองทะเบียนรถยนต์เปลี่ยนระบบออกทะเบียนรถยนต์โดยใช้ตัวเลข 1 ถึง 9 นำหน้าพยัญชนะ 1 ตัว และตามด้วยเลขโดด 4 ตัว เช่น 5ค – 5985 กรุงเทพมหานคร โดยวิธีนี้กองทะเบียนจะออกหมายเลขทะเบียนรถยนต์เพิ่มขึ้นจากเดิมเท่าใด

10. ถ้าเลขทะเบียนรถยนต์ในกรุงเทพมหานครประกอบด้วยพยัญชนะ 2 ตัวและตัวเลข 1 ถึง 4 หลัก ตัวอย่างเช่น กข 1 กค 12 กง 123 และ กจ 1234 อยากทราบว่า จะมีหมายเลขทะเบียนรถยนต์ที่แตกต่างกันทั้งหมดได้กี่เลขทะเบียน

11. จงหาว่า จะมีวิธีเขียนตัวเลขแสดงจำนวนที่มีสองหลักจากเลขโดด 1 – 7 ได้กี่วิธี

12. จงหาว่าจะมีวิธีเขียนด้วยตัวเลขแสดงจำนวนต่อไปนี้ได้กี่วิธีโดยวิธีใช้

1) เลขโดด 2 ถึง 9 เขียนตัวเลขแสดงจำนวนคู่ที่มี 3 หลัก

2) เลขโดด 1 ถึง 8 เขียนด้วยตัวเลขแสดงจำนวนคี่ที่มีสี่หลัก

13. จงหาจำนวนวิธีที่มีผลบวกของแต้มบนหน้าลูกเต๋าสามลูกมากกว่า 4 เมื่อทอดลูกเต๋าสามลูกพร้อมกัน

14. มีจำนวนนับที่มากกว่า 400 อยู่กี่จำนวนที่เป็นจำนวนไม่เกินสี่หลักและแต่ละหลักใช้เลขโดด 2,3,4 หรือ 5 โดยไม่มีเลขโดดซ้ำกัน

1.2 แฟกทอเรียล n (Factorial n)

> บทนิยาม เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก แฟกทอเรียล n หมายถึง ผลคูณของจำนวนเต็มบวกตั้งแต่ 1ถึง n
>
> แฟกทอเรียล n เขียนแทนด้วย n !

n! อ่านว่า แฟกทอเรียลเอ็น หรือ เอ็นแฟกทอเรียล ก็ได้ และบางครั้งเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\underline{|n}$

จากบทนิยาม

1!	=	1		
2!	=	2×1	=	2
3!	=	$3\times 2\times 1$	=	6
4!	=	$4\times 3\times 2\times 1$	=	24
5!	=	$5\times 4\times 3\times 2\times 1$	=	....
6!	=	$...\times 5\times 4\times 3\times 2\times 1$	=	....
7!	=	$...\times ...\times ...\times 4\times 3\times 2\times 1$	=	....
8!	=	....	=	....
9!	=	....	=	....
10!	=	....	=	....
n!	=	$n(n-1)(n-2)(n-3)...\times 3\times 2\times 1$		
(n + 1)! =		....		
(n + 2)! =		....		
(n + 3)! =		....		
(n - 1)! =		....		
(n - 2)! =		....		
(n - 3)! =		....		
(n + r)! =		....		
(n − r)! =		....		

บทนิยามของ n ! กล่าวเฉพาะ n ที่เป็นจำนวนเต็มบวก แต่ในบางครั้งจำเป็นต้องใช้ 0 ! โดยกำหนดค่าของ 0! จากนิยามได้ดังนี้

เนื่องจาก	n !	=	n(n-1) !
ถ้า n = 1 จะได้	1 !	=	1(1-1) !
	1	=	1×0 !
	1	=	0 !
แต่	1 !	=	1

ดังนั้น $\boxed{0 ! = 1}$

ตัวอย่างที่ 1 จงหาค่าของจำนวนต่อไปนี้

1. $\frac{9!}{6!}$
2. $\frac{12!}{10!} \times \frac{5!}{7!}$

วิธีทำ 1. $\frac{9!}{6!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6!}{6!}$

$= 9 \times 8 \times 7$

$= 504$

2. $\frac{12!}{10!} \times \frac{5!}{7!} = \frac{12 \times 11 \times 10!}{10!} \times \frac{5!}{7 \times 6 \times 5!}$

$= \frac{12 \times 11}{7 \times 6}$

$= \frac{22}{7}$

ตัวอย่างที่ 2 จงหาค่าของ $\frac{2!}{5!} + \frac{3!}{4!}$

วิธีทำ $\frac{2!}{5!} + \frac{3!}{4!} = \frac{2!(1) + 3!(5)}{5!}$

$= \frac{2 + 6(5)}{120}$

$= \frac{32}{120}$

$= \frac{4}{15}$

เราสามารถเขียนแฟคทอเรียลที่มีค่าสูง ๆ ให้อยู่ในรูปของแฟคทอเรียลต่ำ ๆ ได้เช่น

$10! = 10 \times 9 \times 8 \times 7!$

$8! = 8 \times 7 \times 6!$

$5! = 5 \times 4!$

$n! = n(n-1)!$

$(n+1)! = (n+1)n(n-1)(n-2)!$

ตัวอย่างที่ 3 จงเขียนจำนวนต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปของแฟคทอเรียล

1. $5 \times 4 \times 3$
2. $10 \times 9 \times 8 \times 7$
3. $(n+1)\ n\ (n-1)\ (n-2)$

วิธีทำ 1. $5\times4\times3 = 5\times4\times3\times\frac{2!}{2!}$

$= \frac{5!}{2!}$

2. $10\times9\times8\times7 = 10\times9\times8\times7\times\frac{6!}{6!}$

= ....

3. (n+1) n (n-1) (n-2) = $(n+1)\,n\,(n-1)\,(n-2)\times\frac{(n-1)!}{(n-1)!}$

= ....

ตัวอย่างที่ 4 ถ้า $\frac{(n+3)!}{(n+1)!} = 30$ แล้ว จงหาค่าของ n

วิธีทำ จาก $\frac{(n+3)!}{(n+1)!} = 30$

$\frac{(n+3)(n+2)(n+1)!}{(n+1)!} = 30$

(n+3) (n+2) = 6×5

เมื่อเทียบพจน์จะได้ (n+3) = 6 และ (n+2) = 5

หรือ n = 6 – 3 และ n = 5 – 2

หรือ n = 3 และ n = 3

ดังนั้น n = 3

แบบฝึกหัด 1.2

1. จงเขียนจำนวนต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปซึ่งไม่มีแฟคทอเรียล

1) $\frac{7!}{4!}$ = ...

2) $\frac{10!}{8!}$ = ...

3) $\frac{15!}{12!}$ = ...

4) $\frac{5!}{7!}$ = ...

5) $\frac{11!5!4!}{2!6!12!}$ = ...

6) $\frac{n!}{(n-1)!}$ = ...

7) $\frac{(n+1)!}{(n-1)!}$ = ...

8) $\frac{(n!)^2}{(n-1)!(n+1)!}$ = ...

2 .จงเขียนจำนวนต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปของแฟคทอเรียล

1) $100\times 99\times 98$ = ...
2) $20\times 19\times 18\times 17$ = ...
3) $5\times 6\times 7\times 8\times 9$ = ...
4) $11\times 12\times 13\times 14\times 15$ = ...
5) n(n-1)(n-2) = ...
6) (n+2)(n+1)(n) = ...
= ....
7) n(n+1)(n+2)(n+3) = ...
8) n(n+1)(n+2)(n+3)...(n+r) = ...
= ....
9) $n(n^2-1)(n^2-4)(n^2-9)$ = ...
= ....

3. จงหาค่าของ n จากสมการต่อไปนี้

1) $\dfrac{n!}{(n-1)!}$ = 10

....
....
....
....

2) $\dfrac{n!}{(n-2)!}$ = 72

....
....
....
....

3) $\dfrac{n!}{(n-2)!}$ = 156

....
....
....
....

4) $\dfrac{(n+2)!}{n!}$ = 420

....
....
....
....

5) $\dfrac{(n+1)!}{(n-1)!} = 930$

....
....
....
....

6) $\dfrac{n!}{(n-3)!} = 210$

....
....
....
....

7) $\dfrac{(n+3)!}{n!} = 1{,}716$

....
....
....
....

8) $\dfrac{n!}{(n-8)!8!} = \dfrac{n!}{(n-9)!9!}$

....
....
....
....
....

9) $\dfrac{n!}{(n-6)!6!} = \dfrac{n!}{(n-8)!8!}$

....
....
....
....
....

10) $\dfrac{(n+1)!}{n!} = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{(n+2)!}{(n+1)!}\right]$

....
....
....
....
....
....

1.3 วิธีเรียงสับเปลี่ยน (Permutation)

วิธีเรียงสับเปลี่ยน หมายถึง การจัดเรียงอันดับสิ่งของโดยถือเอาอันดับเป็นสำคัญ เช่น วิธีเรียงสับเปลี่ยนตัวอักษร 3 ตัว คือ A, B และ C นำมาจัดเรียงอันดับทั้งหมดได้ดังนี้ ABC, ACB, BAC, CAB, CBA เรียกว่า ***วิธีเรียงสับเปลี่ยน***ตัวอักษรทั้ง 3 ตัวนี้มี 6 วิธี

การหาจำนวนวิธีทั้งหมดในการเรียงสับเปลี่ยนจะนำกฎเกณฑ์เบื้องต้นเกี่ยวกับการนำมาใช้โดยถือเสมือนว่าการจัดอันดับแต่ละอันดับเป็นการทำงานอย่างหนึ่ง เช่น การจัดเรียงตัวอักษร 3 ตัวข้างต้นเป็นการทำงาน 3 อย่างดังนี้

การจัดตัวอักษรในตำแหน่งที่ 1 มี 3 วิธี (A หรือ B หรือ C) ในแต่ละวิธีสามารถจัดตัวอักษรในตำแหน่งที่ 2 ได้อีก 2 วิธี (ตัวอักษรที่เหลือ) และในแต่ละวิธีของการจัดตัวอักษรในตำแหน่งที่ 1 และตำแหน่งที่ 2 จะจัดตัวอักษรในตำแหน่งที่ 3 ได้อีก 1 วิธี จำนวนวิธีทั้งหมดในการจัดอันดับตัวอักษรที่แตกต่างกัน จึงเท่ากับ $3\times2\times1$ = 6 วิธี

สรุปเป็นกฎข้อที่ 3 ได้ ดังนี้

กฎข้อที่ 3 จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของ n สิ่ง ซึ่งแตกต่างกันทั้งหมด เท่ากับ n ! วิธี

ตัวอย่างที่ 1 จงหาจำนวนวิธีทั้งหมดในการจัดคน 5 คน เข้าแถวเรียงหนึ่ง

วิธีทำ คนทั้ง 5 คน เปรียบเสมือนสิ่งของ 5 สิ่งที่แตกต่างกัน

ดังนั้น จำนวนวิธีทั้งหมดในการจัดคน 5 คนเข้าแถวเรียงหนึ่ง = 5 !

= $5\times4\times3\times2\times1$

= 120 วิธี

ให้นักเรียนตรวจสอบคำตอบโดยการใช้กฎเกณฑ์เบื้องต้นเกี่ยวกับการนับ

จัดคนเรียงอันดับที่ 1 ได้ .... วิธี

จัดคนเรียงอันดับที่ 2 ได้ .... วิธี

จัดคนเรียงอันดับที่ 3 ได้ .... วิธี

จัดคนเรียงอันดับที่ 4 ได้ .... วิธี

จัดคนเรียงอันดับที่ 5 ได้ .... วิธี

จำนวนวิธีทั้งหมดในการจัดคน 5 คนเข้าแถวเรียงหนึ่ง = ... วิธี

= .... วิธี

ตัวอย่างที่ 2 จงหาจำนวนที่เกิดจากการนำตัวอักษรทั้งหมดจากคำว่า APEC มาเรียงสับเปลี่ยนโดยไม่คำนึงถึงความหมาย

วิธีทำ คำว่า APEC ประกอบด้วยตัวอักษร 4 ตัวที่แตกต่างกัน นำมาจัดเรียงทั้งหมด จำนวนวิธีที่เกิดจากการนำตัวอักษรทั้งหมดมาจัดอันดับ = 4 ! วิธี

= $4\times3\times2\times1$ วิธี

= 24 วิธี

ดังนั้น จำนวนคำทั้งหมดมี 24 คำ

ถ้ามีสิ่งของที่แตกต่างกันทั้งหมด n สิ่ง แต่นำมาจัดเรียงอันดับทีละ r สิ่ง โดยที่ $r \le n$ ตำแหน่งที่จัดเรียงจึงมีเพียง r ตำแหน่ง การหาจำนวนวิธีในการจัดอันดับสรุปเป็นกฎข้อที่ 4 ได้ ดังนี้

กฎข้อที่ 4 จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของ n สิ่ง ซึ่งแตกต่างกันทั้งหมด
โดยจัดทีละ r สิ่ง เท่ากับ $\frac{n!}{(n-r)!}$ วิธี เมื่อ $r \le n$

จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของ n สิ่ง ซึ่งแตกต่างกันทั้งหมด โดยจัดทีละ r สิ่ง เขียนแทนด้วย $P_{n,r}$ จากกฎข้อที่ 4 จะได้

$$\boxed{P_{n.r} = \frac{n!}{(n-r)!}}$$

และ

$$\boxed{P_{n.n} = n!}$$

หมายเหตุ หนังสือบางเล่มอาจใช้สัญลักษณ์อื่น ๆ แทน $P_{n,r}$ เช่น $n\mathrm{Pr}$, ${}^{n}P_{r}$ หรือ $P(n,r)$

ตัวอย่างที่ 3 มีธงสีต่างๆ 5 สี ธงละหนึ่งสี ถ้าต้องการส่งสัญญาณธงโดยการสลับที่ธงครั้งละ 3 ธง เรียงในแนวดิ่งจะมีวิธีส่งสัญญาณธงทั้งหมดกี่วิธี

วิธีทำ มีธงทั้งหมด 5 ธง นำมาเรียงสลับที่ในแนวดิ่งครั้งละ 3 ธง

จำนวนวิธีส่งสัญญาณธงทั้งหมด $= P_{5,3}$

$= \frac{5!}{(5-3)!}$

$= \frac{5!}{2!}$

$= 5 \times 4 \times 3$

$= 60$ วิธี

ตัวอย่างที่ 4 โรงละครแห่งหนึ่งจัดเก้าอี้ไว้แถวละ 10 ตัว ถ้าวิบูลย์จะซื้อตั๋วเข้าไปดูละครพร้อมกับเพื่อนอีก 3 คน เขาจะมีวิธีเลือกที่นั่งในแถวเดียวกันได้กี่วิธี (ถ้าในแถวนั้นยังไม่มีคนจอง)

วิธีทำ วิบูลย์และเพื่อนรวมเป็น 4 คน เลือกนั่งเก้าอี้ 10 ตัวซึ่งเรียงเป็นแถว

จำนวนวิธีในการเลือกที่นั่งทั้งหมด $= P_{10,4}$

$= \frac{10!}{(10-4)!}$

$= \frac{10!}{6!}$

$= 10 \times 9 \times 8 \times 7$

$= 5,040$ วิธี

ตัวอย่างที่ 5 จงหาค่าของ n จากสมการต่อไปนี้

1. $P_{n,2} = 6$
2. $P_{n,3} = 720$
3. $P_{n,3} = 3\,P_{5,2}$

วิธีทำ 1. $P_{n,2} = 6$

$$\frac{n!}{(n-2)!} = 6$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{(n-2)!} = 6$$

$n(n-1) = 3\times 2$

เมื่อเทียบพจน์จะได้ n = 3 และ n – 1 = 2

นั่นคือ n = 3

2. $P_{n,3} = 720$

$$\frac{n!}{(n-2)!} = 720$$

.... = 720

.... = $10\times 9\times 8$

n = ...

3. $P_{n,3} = 3\,P_{5,2}$

$$\frac{n!}{(n-3)!} = 3\times\frac{5!}{(5-2)!}$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)!}{(n-3)!} = 3\times\frac{5\times 4\times 3!}{3!}$$

n(n-1)(n-2) = $3\times 5\times 4$

n = ...

แบบฝึกหัดที่ 1.3

1.จงเติมคำตอบที่ถูกต้อง

1) จำนวนวิธีในการจัดหนังสือ 10 เล่มที่แตกต่างกันวางบนชั้นหนังสือ = ... วิธี

2) จำนวนวิธีในการสลับเปลี่ยนตัวอักษรจากคำว่า HOUSE = ... วิธี

3) จะสร้างจำนวนเต็มบวก 4 หลักที่ตัวเลขไม่ซ้ำกันจากตัวเลขที่เป็นสมาชิกของเซต {2 , 4 , 6 , 8 } ได้ ....จำนวน

2. จงหาค่าของ

1) $P_{6,\,2}$ =..

2) $P_{7,\,3}$ =..

3) $P_{8,\,4}$ =..

4) $P_{12,\,3}$ =..

5) $P_{5,\,5}$ =..

3. จงหาค่าของ n จากสมการต่อไปนี้

1) $P_{n,\,2} = 56$

....
....
....
....

2) $P_{n,\,3} = 120$

....
....
....
....

3) $P_{n+1,\,3} = 504$

....
....
....
....

4) $3P_{n+2,\,3} = 630$

....
....
....
....

5) $P_{n+1,3} - 10P_{n-1,2} = 0$

....
....
....
....

4. มีหนังสือต่าง ๆ กัน 10 เล่ม นำมาจัดวางบนหิ้งหนังสือซึ่งวางได้ 6 เล่ม จะจัดได้กี่วิธี

....

....

....

5. นักเรียนห้องหนึ่งต้องการเลือกคณะกรรมการห้องซึ่งประกอบด้วยตำแหน่ง ประธาน รองประธาน เลขานุการ และเหรัญญิกและผู้ช่วยเหรัญญิก ตำแหน่งละ 1 คน ถ้ามีผู้สมัครทั้งหมด 9 คน จำนวนวิธีในการเลือกคณะกรรมการห้องมีทั้งหมดกี่วิธี

....

....

....

....

6. บริษัทแห่งหนึ่งมีตำแหน่งว่างอยู่ 3 ตำแหน่ง ถ้ามีผู้มาสมัคร 5 คน ทางบริษัทจะมีวิธีคัดเลือกคนเข้าทำงานได้ทั้งหมดกี่วิธี

....

....

....

....

7. ในการวิ่งระยะทาง 100 เมตร มีผู้แข่งขัน 5 คน จงหาวิธีที่แต่ละคนวิ่งเข้าเส้นชัยในตำแหน่งที่ 1, 2 และ 3 ถ้าไม่มีใครวิ่งเสมอกัน

....

....

....

8. จากตัวเลข 1, 2, 3, 4, 5 จะนำมาสร้างจำนวนเต็มบวก 4 หลักได้กี่จำนวนถ้ากำหนดให้ตัวเลขแต่ละหลักไม่ซ้ำกัน

....

....

....

....

9. จงหาจำนวนวิธีในการจัดชาย 4 คน หญิง 3 คนเข้าแถวตรง โดยให้เพศเดียวกันยืนชิดกันเสมอ

....

....

....

10. จงหาจำนวนวิธีในการเรียงสับเปลี่ยนตัวอักษร SHIFT โดยให้สระอยู่ตรงกลางเสมอ

....

....

....

11. หน่วยงานแห่งหนึ่งมีตำแหน่งว่างสำหรับชาย 3 ตำแหน่งและสำหรับหญิง 2 ตำแหน่ง ถ้ามีชายมาสมัครงาน 5 คน หญิง 4 คน จะมีวิธีเลือกคนเข้าทำงานได้กี่วิธี

....
....
....

12. จงหาจำนวนวิธีในการจัดชาย 5 คน หญิง 5 คน เข้าแถวตรง ถ้ากำหนดให้ดังนี้

1) ไม่มีเงื่อนไขเพิ่มเติม
2) ชายยืนหัวแถวเสมอและชายหญิงยืนสลับกัน

....
....
....
....
....
....

13. จงหาจำนวนวิธีในการจัดชาย 6 คน หญิง 6 คน เข้าแถวตรง ถ้ากำหนดให้ดังนี้

1) ไม่มีเงื่อนไขเพิ่มเติม
2) ชายยืนหัวแถวเสมอและชายหญิงยืนสลับกัน
3) ชายกับหญิงยืนสลับกัน
4) ชายสองคนยืนสลับกับหญิงสองคน
5) ชายสามคนยืนสลับกับหญิงสามคน
6) ชายทุกคนยืนติดกันและหญิงทุกคนยืนติดกัน

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

1.4 วิธีเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของเชิงวงกลม

วิธีเรียงสับเปลี่ยนที่กล่าวมาข้างต้น เป็นวิธีเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของที่แตกต่างกันเป็นแนวเส้นตรงซึ่งมีหัวแถวและท้ายแถว แต่ถ้านำมาเรียงสับเปลี่ยนเป็นวงกลม จำนวนวิธีจะแตกต่างกันออกไปเพราะการเรียงสับเปลี่ยนเป็นวงกลมไม่มีหัวแถวและท้ายแถว เช่น วิธีสับเปลี่ยนตัวอักษร 3 ตัว คือ A , B และ C ถ้าจัดเป็นวงกลม ABC , CBA และ BAC ถ้าจัดเรียงเป็นวงกลมจะได้ 1 วิธี ดังรูป

วิธีเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของเชิงวงกลมนั้นถือว่า**หัวแถวจะตั้งต้นที่ตำแหน่งใดของวงกลมก็ได้**ถ้าสิ่งที่เรียงตามมาเหมือนกันถือว่าเป็นการจัดวิธีเดียวกันทั้งสิ้น เพื่อสะดวกในการคิดคำนวณจำนวนวิธีในการเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของ n สิ่ง เป็นวงกลม จึงกำหนดให้ของ**สิ่งหนึ่งอยู่คงที่แล้ว**จัดสิ่งของที่เหลือ n – 1 สิ่งเรียงสับเปลี่ยนกัน ดังนั้น จะได้จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของ n สิ่ง เชิงวงกลม เท่ากับ $(n-1)(n-2)(n-3)\ldots3\cdot2\cdot1 = (n-1)!$ สรุปเป็นกฎข้อที่ 5 ได้ดังนี้

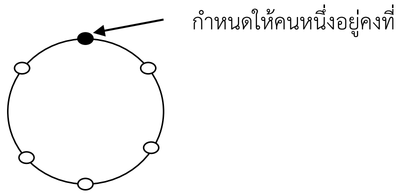
กฎข้อที่ 5 จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนเชิงวงกลมของสิ่งของ n สิ่ง ซึ่งแตกต่างกันทั้งหมดเท่ากับ $(n-1)!$ วิธี

ตัวอย่างที่ 6 จงหาจำนวนวิธีในการจัดคน 6 คน นั่งรับประทานอาหารรอบโต๊ะกลมซึ่งมีเก้าอี้ 6 ตัว

วิธีทำ จำนวนวิธีในการจัดคน 6 คน นั่งรอบโต๊ะกลม $= (6-1)!$

$= 5!$

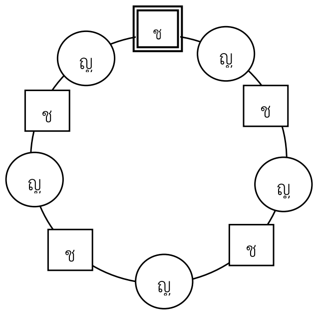
$= 120$ วิธี



ตัวอย่างที่ 7 จงหาจำนวนวิธีในการจัดชาย 5 คน หญิง 5 คน ยืนสลับกันเป็นวงกลม

วิธีทำ กำหนดให้ชายคนหนึ่งยืนคงที่ เหลือชายอีก 4 คนและหญิง 5 คน

เนื่องจากชายและหญิงต้องยืนสลับกัน จึงมีตำแหน่งให้ชายยืนสับเปลี่ยนกันได้ 4 ตำแหน่งและหญิงยืนสับเปลี่ยนกันได้ 5 ตำแหน่ง ดังรูป



จัดชายยืนเรียงสับเปลี่ยนเป็นวงกลมได้ (5 - 1) ! = 4 ! วิธี (ให้คงที่ 1 คน)

จัดหญิงยืนเรียงสับเปลี่ยนแทรกระหว่างชายได้ = 5 ! วิธี (5 คน 5 ตำแหน่ง)

ดังนั้น จำนวนวิธีในการจัดชาย 5 คนหญิง 5 คน ยืนสลับกันเป็นวงกลม = 4! 5!

= 24×120

= 2,880 วิธี

หมายเหตุ ใน**ตัวอย่างที่ 7** อาจจัดให้ผู้ที่อยู่คงที่เป็นหญิงก็ได้ ซึ่งจะได้คำตอบเท่ากัน

แบบฝึกหัดที่ 1.4

1.จงเติมคำตอบที่ถูกต้อง

1) จำนวนวิธีในการจัดกระถางต้นไม้ 5 กระถางต่างชนิดกันรอบเสาธง = ...วิธี

2) จะจัดหลอดไฟสีต่าง ๆ กัน 6 หลอดประดับรอบสระน้ำรูปวงกลมได้ = ... วิธี

2. มีเก้าอี้สีต่าง ๆ กัน 7 ตัว นำมาจัดเป็นวงกลม จะจัดได้กี่วิธี

....

....

....

3. จงหาจำนวนวิธีในการจัดชาย 4 คน หญิง 3 คน ยืนล้อมวง โดยให้เพศเดียวกันยืนชิดกัน

....

....

....

4. จงหาจำนวนวิธีในการจัดชาย 4 คน หญิง 4 คน เข้าแถวเป็นวงกลม ถ้ากำหนดให้ดังนี้

1) ไม่มีเงื่อนไขเพิ่มเติม

2) ชายและหญิงยืนสลับกัน

....

....

....

....

5. จงหาจำนวนวิธีในการจัดสามี ภรรยา 3 คู่ นั่งรอบโต๊ะกลม โดยที่สามี ภรรยาแต่ละคู่ต้องนั่งติดกันเสมอ

....

....

....

6. จงหาจำนวนวิธีในการจัดคน 7 คนนั่งนอบโต๊ะกลม ซึ่งมีนิด หน่อย และน้อย รวมอยู่ด้วยถ้ากำหนดให้นิดกับหน่อยนั่งติดกันเสมอแต่น้อยนั่งติดกับนิดไม่ได้

....

....

....

7. จงหาจำนวนวิธีในการจัดชาย 6 คน หญิง 6 คน ยืนล้อมวง ถ้ากำหนดให้ดังนี้

1) ไม่มีเงื่อนไขเพิ่มเติม
2) ชายกับหญิงยืนสลับกัน
3) ชายสองคนยืนสลับกับหญิงสองคน
4) ชายสามคนยืนสลับกับหญิงสามคน
5) ชายทุกคนยืนติดกันและหญิงทุกคนยืนติดกัน

....

....

....

....

....

....

....

....

1.5 วิธีเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของที่ไม่แตกต่างกันทั้งหมด

สิ่งของที่ไม่แตกต่างกันทั้งหมดหรือสิ่งของที่เหมือนกันเป็นกลุ่มๆ เช่น มีธงอยู่ 10 ผืน เป็นธงสีแดง 2 ผืน สีเขียว 3 ผืน และสีเหลือง 5 ผืน ถือได้ว่าเป็นสิ่งของ 3 กลุ่ม ในแต่ละกลุ่มมีสิ่งของที่เหมือนกัน เมื่อนำสิ่งของทั้งหมดมานำสับเปลี่ยนกัน **สิ่งของที่เหมือนกันจะไม่ทำให้เกิดวิธีใหม่** จำนวนวิธีเรียงสลับเปลี่ยนจึง**น้อยกว่า**การเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของที่แตกต่างกันทั้งหมด

ตัวอย่างที่ 1 นำตัวอักษร 3 ตัว ซึ่งได้แก่ A, A และ B มาเรียงกันได้ทั้งหมดกี่วิธี
วิธีคิด เนื่องจากเราทราบมาแล้วว่าการเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของที่แตกต่างกันทั้งหมด 3 สิ่ง เช่น นำตัวอักษร 3 ตัว ซึ่งได้แก่ A, B และ C มาเรียงสับเปลี่ยนกันได้ทั้งหมด 6 วิธี ได้แก่ ABC, ACB, BAC, BCA, CAB และ CBA

แต่ถ้าตัวอักษร C เป็น A แล้ว วิธีเรียงสับเปลี่ยนกันทั้ง 6 วิธี ได้แก่ ABA, AAB, BAA, BAA, AAB และ ABA จะเห็นว่าวิธีเรียงสับเปลี่ยนวิธีที่ 1 และวิธีที่ 6 ไม่แตกต่างกัน จึงนับว่าเป็นวิธีเดียวกัน

วิธีเรียงสับเปลี่ยนวิธีที่ 2 และวิธีที่ 5 ไม่แตกต่างกัน จึงนับว่าเป็นวิธีเดียวกัน

และ วิธีเรียงสับเปลี่ยนวิธีที่ 1 และวิธีที่ 6 ก็ไม่แตกต่างกัน จึงนับว่าเป็นวิธีเดียวกัน

ดังนั้น นำตัวอักษร 3 ตัว ซึ่งได้แก่ A, A และ B มาเรียงกันได้ทั้งหมด 3 วิธี

โดยทั่วไปถ้ามีสิ่งของอยู่ n สิ่งในจำนวนนี้มี n_1 สิ่งที่เหมือนกันเป็นกลุ่มที่หนึ่ง มี n_2 สิ่งที่เหมือนเป็นกลุ่มที่สอง มี n_3 สิ่งที่เหมือนเป็นกลุ่มที่สาม... และมี n_k สิ่งที่เหมือนกันเป็นกลุ่มที่ k โดยที่ $n_1+n_2+n_3+...+n_k=n$ ในวิธีเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของ n สิ่ง ที่แตกต่างกันทั้งหมด จะมีวิธีเรียงสับเปลี่ยน n ! วิธี แต่ในกรณีที่มีของเหมือนกันเป็นกลุ่ม ๆ จำนวนวิธีจะน้อยลงไป คือในจำนวน n ! วิธีดังกล่าวจะรวมวิธีเรียงสับเปลี่ยนที่ไม่แตกต่างกันได้ถึง $n_1!$ วิธี สำหรับของกลุ่มแรกที่เหมือนกัน และ $n_2!$ วิธี สำหรับของกลุ่มที่สองที่เหมือนกัน...และ $n_k!$ สำหรับของกลุ่มที่ k ที่เหมือนกัน ดังนั้น จึงมีวิธีเรียงสับเปลี่ยนที่สามารถเห็นความแตกต่างกันของสิ่งของทั้ง n สิ่งได้ เท่ากับ $\frac{n!}{n_1!n_2!...n_k!}$ วิธี

สรุปเป็นกฎข้อที่ 6 ได้ ดังนี้

กฎข้อที่ 6 ถ้ามีสิ่งของอยู่ n สิ่งในจำนวนนี้มี n_1 สิ่งที่เหมือนกันเป็นกลุ่มที่หนึ่ง มี n_2 สิ่งที่เหมือนกันเป็นกลุ่มที่สอง มี n_3 สิ่งที่เหมือนกันเป็นกลุ่มที่สาม... และมี n_k สิ่งที่เหมือนกันเป็นกลุ่มที่ k โดยที่ $n_1+n_2+n_3+...+n_k=n$ แล้ว จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของทั้ง n สิ่ง เท่ากับ $\frac{n!}{n_1!n_2!...n_k!}$ วิธี

ตัวอย่างที่ 2 มีหนังสือคณิตศาสตร์ 3 เล่ม ภาษาอังกฤษ 4 เล่มและภาษาไทย 2 เล่ม ถ้าหนังสือวิชาเดียวกันเหมือนกัน จงหาจำนวนวิธีในการจัดเรียงหนังสือทั้งหมดบนชั้นหนังสือ

วิธีทำ หนังสือทั้งหมดมี 9 เล่ม แบ่งเป็น 3 กลุ่ม คือ

กลุ่มที่ 1 เป็นหนังสือคณิตศาสตร์ 3 เล่ม

กลุ่มที่ 2 เป็นหนังสือภาษาอังกฤษเหมือนกัน 4 เล่ม

กลุ่มที่ 3 เป็นหนังสือภาษาไทยเหมือนกัน 2 เล่ม

ดังนั้น จำนวนวิธีในการจัดเรียงหนังสือ = $\frac{9!}{3!4!2!}$

= ....

= ....

= .... วิธี

ตัวอย่างที่ 3 สมภพมีธนบัตรอยู่ 8 ใบ เป็นธนบัตรใบละห้าร้อยบาท 2 ใบ ใบละหนึ่งร้อยบาท 3 ใบ ใบละห้าสิบบาท 1 ใบ และใบละยี่สิบบาท 2 ใบ จงหาว่าสมภพจะมีวิธีจัดเรียงซ้อนธนบัตรทั้งหมดได้กี่วิธี

วิธีทำ จำนวนวิธีในการจัดเรียงซ้อนธรบัตรทั้งหมด = $\frac{8!}{2!3!1!2!}$

= ....

= ....

= .... วิธี

แบบฝึกหัด 1.5

1. จงหาจำนวนวิธีในการจัดตัวเลข 3 , 4 , 5 , 5, 2 , 3, 3 ให้เป็นจำนวน 7 หลัก

....

....

2. จงหาจำนวนวิธีในการจัดคน 10 คน ให้โดยสารรถไฟ ถ้าผู้จัดมีตั๋วโดยสารชั้นหนึ่ง 2 ใบ ชั้นสอง 3 ใบ และชั้นสาม 5 ใบ

....

....

3. มีหนังสืออยู่ 12 เล่ม เป็นนวนิยาย 4 เล่ม สารคดี 3 เล่มและการ์ตูน 5 เล่ม ถ้าหนังสือประเภทเดียวกันเหมือนกัน จงหาจำนวนวิธีในการจัดเรียงหนังสือทั้งหมดบนชั้นหนังสือ ถ้า

1. ไม่กำหนดเงื่อนไขเพิ่มเติม
2. ให้หนังสือประเภทเดียวกันอยู่ติดกันเสมอ

....

....

....

....

4. จงหาจำนวนวิธีในการนำอักษรจากคำที่กำหนดให้มาเรียงสับเปลี่ยน

1. UNSEEN 2. SUCCESSOR

....

....

....

....

5. จากตัวเลข 2, 2, 2, 3, 3, 4 จะสร้างจำนวนเต็มบวกที่มีค่ามากกว่าสองแสนได้กี่จำนวน

....

....

....

6. ในการจัดหลอดไฟสี 9 หลอด เพื่อประดับเสาต้นหนึ่งตามแนวดิ่ง ถ้ามีหลอดไฟสีแดง 3 หลอด สีเหลือง 4 หลอดและสีน้ำเงิน 2 หลอด จะมีวิธีจัดได้กี่วิธี

....

....

....

7. จงหาจำนวนวิธีในการจัดคน 6 คน ดูแลความสะอาดของอาคาร 3 หลัง ถ้ากำหนดให้อาคารหลังที่ 1 มีคนดูแล 3 คน หลังที่ 2 มีคนดูแล 2 คนและหลังที่ 3 มีคนดูแล 1 คน

....

....

....

....

1.6 วิธีจัดหมู่ (Combination)

การจัดหมู่สิ่งของที่แตกต่างกัน เป็นการจัดกลุ่มสิ่งของโดยไม่คำนึงถึงอันดับของสิ่งของนั้น เช่น ตัวอักษร 3 ตัว คือ A, B และ C ถ้านำมาจัดหมู่คราวละ 2 ตัวจะจัดได้ 3 วิธี คือ AB, AC, และ BC แต่ถ้านำมาเรียงสับเปลี่ยนกันคราวละ 2 ตัว จะได้ 6 วิธี คือ AB, BA, AC, CA, BC, และ CB จะเห็นได้ว่าจำนวนวิธีในการจัดหมู่จะน้อยกว่าจำนวนวิธีในการเรียงสับเปลี่ยน

จำนวนวิธีในการจัดหมู่สิ่งของที่แตกต่างกันทั้งหมด n สิ่ง ให้มีหมู่ละ r สิ่ง เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $C_{n,r}$ หรือ $\binom{n}{r}$

สรุปเป็นกฎข้อที่ 7 ได้ดังนี้

กฎข้อที่ 7 จำนวนวิธีจัดหมู่สิ่งของที่แตกต่างกัน n สิ่ง ให้มีหมู่ละ r สิ่ง เมื่อ $r \le n$ เท่ากับ $\frac{n!}{r!(n-r)!}$

จากกฎข้อที่ 7 จะได้ $C_{n,r} = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$

หมายเหตุ ในหนังสือบางเล่มอาจใช้สัญลักษณ์ nCr หรือ ${}^{n}C_{r}$ แทน จำนวนวิธีในการจัดหมู่สิ่งของที่แตกต่างกันทั้งหมด n สิ่ง ให้มีหมู่ละ r สิ่ง

ข้อสังเกต

1. $C_{n,r} = \frac{P_{n,r}}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$
2. $\binom{n}{n-r} = \binom{n}{r}$

ตัวอย่างที่ 1 จงหาจำนวนวิธีในการหยิบลูกแก้วครั้งละ 3 ลูก จากที่มีอยู่ทั้งหมด 10 ลูก

วิธีทำ จำนวนวิธีมนการหยิบลูกแก้วครั้งละ 3 ลูก จากทั้งหมด 10 ลูก $= \binom{10}{3}$

$$= \frac{10!}{3!(10-3)!}$$

$$= \frac{10\times 9\times 8\times 7!}{(3\times 2\times 1)7!}$$

$= 120$ วิธี

ตัวอย่างที่ 2 จงหาค่าของ $C_{5,3}$ และ $P_{5,3}$ แล้วเปรียบเทียบค่าที่ได้

วิธีทำ ค่าของ $C_{5,3}$ = $\frac{5!}{3!(5-3)!}$

= ....

= ....

ค่าของ $P_{5,3}$ = $\frac{5!}{(5-3)!}$

= ....

= ....

จะเห็นได้ว่าค่าของ $P_{5,3}$ = $3!C_{5,3}$

ตัวอย่างที่ 3 ข้อสอบวิชาหนึ่งมีทั้งหมด 5 ข้อ นักเรียนคนหนึ่งสามารถทำได้ทุกข้อ จงหาจำนวนวิธีที่นักเรียนคนนี้จะเลือกทำข้อสอบ ถ้ากำหนดให้

1. เลือกทำ 3 ข้อ
2. เลือกทำ 2 ข้อ

วิธีทำ 1. จำนวนวิธีที่จะเลือกทำข้อสอบ 3 ข้อจาก 5 ข้อ = $\binom{5}{3}$

= ....

= ....

2. จำนวนวิธีที่จะเลือกทำข้อสอบ 2 ข้อจาก 5 ข้อ = $\binom{5}{2}$

= ....

= ....

เปรียบเทียบคำตอบที่ได้จากข้อ 1 และ ข้อ 2 พบว่ามีค่า ....

ตัวอย่างที่ 4 มีดินสออยู่ 1 โหล ซึ่งแต่ละแท่งมีสีต่างกัน ถ้าต้องการหยิบครั้งละ 5 แท่งตามเงื่อนไขต่อไปนี้ จงหาว่าจะมีวิธีหยิบได้กี่วิธี

1. แต่ละครั้งที่หยิบต้องมีดินสอสีแดงอยู่ด้วย
2. แต่ละครั้งที่หยิบต้องไม่มีดินสอบสีแดง

วิธีทำ 1. แต่ละครั้งที่หยิบจะต้องมีดินสอสีแดง ดังนั้นจึงเลือกหยิบดินสอสีอื่นอีกเพียง 4 แท่ง จากดินสอ 11 แท่ง จะมีวิธีหยิบได้ = $\binom{11}{4}$

= ....

= ....

= .... วิธี

2. แต่ละครั้งที่หยิบจะต้องไม่มีดินสอสีแดง ดังนั้นจึงเลือกหยิบดินสอสีอื่นครั้งละ 5 แท่ง จากดินสอ 11 แท่ง จะมีวิธีหยิบได้ = $\binom{11}{5}$

= ....

= ....

= .... วิธี

แบบฝึกหัด 1.6

1.จงหาค่าของ

1) $\binom{8}{5}$ = ...

=..

2) $\binom{8}{3}$ = ...

=..

3) $\binom{10}{3}$ = ...

=..

4) $\binom{10}{7}$ = ...

=..

5) $\binom{12}{9}$ = ...

=..

6) $\binom{12}{3}$ = ...

=..

7) $\binom{n}{2}$ = ...

=..

8) $\binom{n}{n-2}$ = ...

=..

9) $\binom{n}{r}$ = ...

=..

Commented [CE1]:

Commented [CE2R1]:

10) $\binom{n}{n-r}$ = ...

=..

11) $\binom{n}{n}$ = ...

=..

12) $\binom{n}{0}$ = ...

=..

13) $\binom{n}{1}$ = ...

=..

14) $\binom{n}{n-1}$ = ...

=..

2. ถ้า $C_{5,3}$ = 10 แล้ว จงหาค่าของ $P_{5,3}$

....

....

....

....

3. ถ้า $C_{n,2}$ = 45 แล้ว จงหาค่าของ $P_{n,3}$

....

....

....

....

4. ถ้า $P_{n,4}$ = 840 แล้ว จงหาค่าของ $C_{n,4}$

....

....

....

....

5. ถ้า $\binom{28}{n} = \binom{28}{n+8}$ แล้ว จงหาค่าของ $P_{n,3}$

....

....

....

....

6. ถ้า $\binom{n}{8} = \binom{n}{20}$ แล้ว จงหาค่าของ $\binom{30}{n}$

....
....
....
....

7. จงหาจำนวนวิธีที่จะเลือกกรรมการชุดหนึ่งซึ่งมี 6 คน จากผู้สมัคร 9 คน

....
....
....
....

8. มีตุ๊กตาอยู่ 12 ตัว ถ้าจะแบ่งให้น้อง 3 ตัว น้องจะมีวิธีเลือกกี่วิธี

....
....
....
....

9. กำหนดจุด 5 จุด บนเส้นมีเส้นรอบวงของวงกลมวงหนึ่ง จะสร้างรูปสามเหลี่ยมแนบในวงกลม
โดยใช้จุดเหล่านี้เป็นจุดยอดมุมได้ทั้งหมดกี่รูป (เขียนรูปประกอบเพื่อตรวจสอบคำตอบ)

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

10. เส้นทแยงมุมของรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามีทั้งหมดกี่เส้น

....
....
....
....

11. เส้นทแยงมุมของรูป n เหลี่ยมมีทั้งหมดกี่เส้น

....
....
....
....
....
....

12. มีหนังสือภาษาอังกฤษ 10 เล่ม ภาษาไทย 8 เล่ม นักเรียนคนหนึ่งต้องการยืมหนังสือภาษาอังกฤษ 3 เล่ม และภาษาไทย 2 เล่ม จะมีวิธีเลือกได้กี่วิธี

....
....
....
....
....
....

13. กล่องใบหนึ่งมีลูกบอลอยู่ 12 ลูก เป็นสีแดง 5 ลูก สีขาว 4 ลูก และสีน้ำเงิน 3 ลูก ถ้าหยิบลูกบอล 3 ลูก จากกล่องใบนี้ตามเงื่อนไขที่กำหนดให้ จะมีวิธีเลือกหยิบได้กี่วิธี

1) ได้ลูกบอลสีขาว 1 ลูก
2) ได้ลูกบอลสีขาวอย่างน้อย 1 ลูก
3) ได้ลูกบอลสีต่างกันทั้ง 3 ลูก

....
....
....
....
....
....
....
....

14. ในการแข่งขันฟุตบอลต้านยาเสพติด มีทีมฟุตบอลสมัครทั้งหมด 6 ทีม ถ้าจัดการแข่งขันแบบพบกันหมด คณะกรรมการจะจัดการแข่งขันได้ทั้งหมดกี่ครั้ง

....
....
....
....

15. ไพ่สำรับหนึ่งมี 52 ใบ แบ่งเป็น 4 ชุด ๆ ละ 13 ใบ ได้แก่ ชุดโพแดง โพดำ ดอกจิกและข้าวหลามตัด จงหาจำนวนวิธีที่จะหยิบไพ่ตามเงื่อนไขต่อไปนี้
    1) หยิบมา 2 ใบจะเป็นชุดใดก็ได้
    2) หยิบมา 4 ใบ แต่ละใบไม่ซ้ำชุดกัน
    3) หยิบมา 5 ใบ เป็นโพดำทั้งหมด
    4) หยิบมา 13 ใบ เป็นโพแดง 3 ใบ โพดำ 5 ใบ และดอกจิก 5 ใบ

....
....
....
....
....
....
....
....
....

16. เส้นตรง 4 เส้น และ วงกลม 3 วง ตัดกันมากที่สุดกี่จุด

....
....
....
....
....
....

1.7 ทฤษฎีบททวินาม

เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริงใด ๆ จะได้

$(a+b)^0 = 1$

$(a+b)^1 = a+b$

$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$

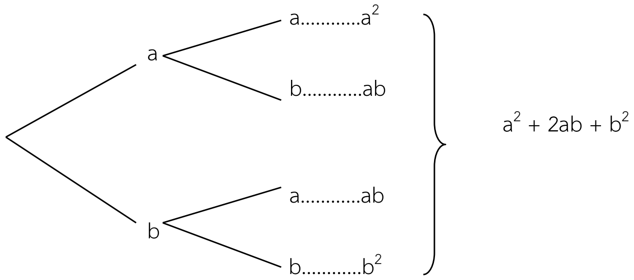
$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$(a+b)^4 = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$

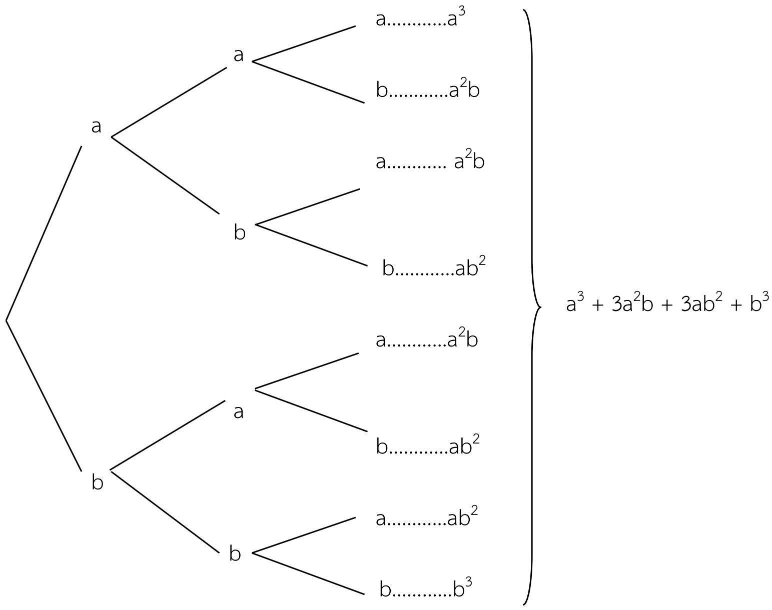
...

พิจารณาแผนภาพแสดงการกระจาย $(a+b)^2$ และ $(a+b)^3$ ดังต่อไปนี้

$(a+b)^2 = (a+b)(a+b)$



$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$



พิจารณาการกระจาย $(a+b)^n$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวกที่ไม่มากนัก อาจทำได้โดยคูณ $(a+b)$ เข้าด้วยกัน n วงเล็บ แต่ถ้า n เป็นจำนวนมาก ๆ ย่อมเสียเวลาและผิดพลาดได้ง่าย ในที่นี้เราจะหาสูตรสำหรับกระจาย $(a+b)^n$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ

เนื่องจาก $(a+b)^n = \underbrace{(a+b)\,(a+b)\,(a+b)\ldots(a+b)}_{\text{n วงเล็บ}}$

ถ้านำ a จากทุกวงเล็บมาคูณกัน จะได้พจน์ a^n พจน์เช่นนี้เกิดขึ้นได้วิธีเดียว ดังนั้น จะได้พจน์ a^n เพียงพจน์เดียว

ถ้านำ b จาก 1 วงเล็บ มาคูณกับ a จาก n – 1 วงเล็บที่เหลือ จะได้พจน์ $a^{n-1}b$ พจน์เช่นนี้เกิดขึ้นได้ $\binom{n}{1} = n$ วิธี เพราะจะเลือก b จากวงเล็บใดก็ได้ ดังนั้น จะได้พจน์ $a^{n-1}b$ จำนวน $\binom{n}{1}$ พจน์

ถ้านำ b จาก 2 วงเล็บ มาคูณกับ a จาก n – 2 วงเล็บที่เหลือ จะได้พจน์ $a^{n-2}b^2$ พจน์เช่นนี้เกิดขึ้นได้ $\binom{n}{2}$ วิธี เพราะจะเลือก b จาก 2 วงเล็บใดก็ได้ ดังนั้น จะได้พจน์ $a^{n-2}b^2$ จำนวน $\binom{n}{2}$ พจน์

.

.

.

ถ้านำ b จากทุกวงเล็บมาคูณกัน จะได้พจน์ b^n พจน์เช่นนี้เกิดขึ้นได้วิธีเดียว ดังนั้น จะได้พจน์ b^n เพียงพจน์เดียว r

เมื่อหาครบทุกพจน์ที่จะเป็นไปได้แล้ว นำพจน์ต่าง ๆ มาบวกกัน ผลที่ได้จะเป็นการกระจายของ $(a+b)^n$

ทุกพจน์ของการกระจาย $(a+b)^n$ เขียนได้ในรูป $a^{n-r}b^r$ เมื่อ r เป็นจำนวนเต็มบวก และ $0 \le r \le n$ ซึ่งพิจารณาได้ดังนี้ เนื่องจาก $a^{n-r}b^r$ เป็นผลคูณ b จาก r วงเล็บ กับ a จาก n – r วงเล็บที่เหลือ พจน์เช่นนี้เกิดขึ้นได้ $\binom{n}{r}$ วิธี เพราะจะเลือก b จาก r วงเล็บใด ๆ ก็ได้ จาก n วงเล็บที่มีอยู่

การกระจาย $(a+b)^n$ สรุปเป็นทฤษฎีได้ดังนี้

ทฤษฎีบททวินาม เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริง n และ r เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ และ $0 \le r \le n$ แล้ว

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{r}a^{n-r}b^r + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + b^n$$

ข้อตกลง $\binom{n}{r}$ เมื่อ $0 \le r \le n$ ที่ปรากฏในทฤษฎีบททวินาม เรียกว่า ***สัมประสิทธิ์ทวินาม***

ข้อสังเกต เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก

1) เมื่อกระจาย $(a+b)^n$ จะได้ n+1 พจน์
2) อาจเขียนพจน์แรกในรูปที่มีสัมประสิทธิ์กำกับได้เป็น $\binom{n}{0}a^n$ และ
   อาจเขียนพจน์หลังในรูปที่มีสัมประสิทธิ์กำกับได้เป็น $\binom{n}{0}b^n$ ก็ได้
   ทั้งนี้เนื่องจาก $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ จึงมักไม่นิยมเขียนสัมประสิทธิ์ของทั้งสองพจน์นี้
3) เลขชี้กำลังของ a เริ่มจาก n แล้วลดลงทีละ 1 จนถึง 0 ส่วนเลขชี้กำลังของ b เริ่มจาก 0 เพิ่มขึ้นทีละ1 จนถึง n

4) ในแต่ละพจน์ของการกระจาย ผลรวมของเลขชี้กำลังของ a กับเลขชี้กำลังของ b (ดีกรีของแต่ละพจน์) เป็น n เสมอ

ในการกระจาย $(a+b)^n$ จะเห็นได้ว่า $\binom{n}{r}a^{n-r}b^r$ เป็นพจน์ที่ r+1 ดังนั้นเมื่อต้องการหาเฉพาะพจน์ใดพจน์หนึ่งของการกระจาย $(a+b)^n$ จะหาได้จาก

พจน์ที่ r + 1 ของการกระจาย $(a+b)^n$ = $\binom{n}{r}a^{n-r}b^r$

เราเรียกพจน์ที่ r+1 นี้ ว่า **พจน์ทั่วไปของการกระจาย** $(a+b)^n$

เราสามารถนำทฤษฎีบททวินามไปใช้ประโยชน์ในด้านอื่นอีก เช่น ในวิชาสถิติ และ ทฤษฎีความน่าจะเป็น

ตัวอย่างที่ 1 จงกระจาย $(a+b)^5$ โดยใช้ทฤษฎีบททวินาม

วิธีทำ จากทฤษฎีบททวินาม

$$(a+b)^5 = a^5 + \binom{5}{1}a^4b + \binom{5}{2}a^3b^2 + \binom{5}{3}a^2b^3 + \binom{5}{4}ab^4 + b^5$$

$$= a^5 + \frac{5!}{1!4!}a^4b + \frac{5!}{2!3!}a^3b^2 + \frac{5!}{3!2!}a^2b^3 + \frac{5!}{4!1!}ab^4 + b^5$$

ดังนั้น $(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$

ตัวอย่างที่ 2 จงกระจาย $(2x-3y)^4$ โดยอาศัยทฤษฎีบททวินาม

วิธีทำ $(2x-3y)^4 = [2x+(-3y)]^4$

$$= (2x)^4 + \binom{4}{1}(2x)^3(-3y) + \binom{4}{2}(2x)^2(-3y)^2 + \binom{4}{3}(2x)(-3y)^3 + (-3y)^4$$

$$= 16x^4 - 96x^3y^2 + 216x^2y^2 - 216xy^3 + 81y^4$$

ตัวอย่างที่ 3 จงหาพจน์กลางของการกระจาย $(p+3)^{12}$

วิธีทำ จากทฤษฎีบททวินามในการกระจาย $(a+b)^n$ จะมีทั้งหมด n + 1 พจน์

ดังนั้นในกระจาย $(p+3)^{12}$ จะมีทั้งหมด 13 พจน์ และ พจน์กลางคือพจน์ที่ 7

เนื่องจาก พจน์ r + 1 ของการกระจาย $(a+b)^n$ = $\binom{n}{r}a^{n-r}b^r$

ดังนั้นพจน์ที่ 7 ของการกระจาย $(p+3)^{12}$ = $\binom{12}{6}p^{12-6}3^6$

$$= \frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}\left(p^6\cdot 729\right)$$

$$= 673{,}596p^6$$

สามเหลี่ยมของปาสกาล
(Pascal's Triangle)

พิจารณาสัมประสิทธิ์ทวินามที่ได้จากการกระจาย $(a+b)^n$ เมื่อ $n = 1,2,3,\ldots\ldots$ พบว่า สัมประสิทธิ์ทวินามของ $(a+b)^n$ เป็นดังนี้

การกระจาย $(a+b)^n$	สัมประสิทธิ์ทวินามของ $(a+b)^n$
$n = 0$	…
$n = 1$	1 1
$n = 2$	1 2 1
$n = 3$	1 3 3 1
$n = 4$	1 4 6 4 1
$n = 5$	1 5 10 10 5 1
….	. . . . . .

มีผู้สังเกตผู้หนึ่งพบว่า สัมประสิทธิ์แต่ละตัวได้จากการนำจำนวนสองจำนวนที่อยู่ติดกันและอยู่เหนือขึ้นไปมาบวกกัน และเมื่อนำมาเขียนจะได้รูปที่คล้ายกับรูปสามเหลี่ยม หากเพิ่มสัมประสิทธิ์ทวินามของ $(a+b)^0$ ซึ่งเท่ากับ 1 จะพบว่าคล้ายกันมุมยอดของรูปสามเหลี่ยม ผู้ที่สังเกตสมบัติของจำนวนเหล่านี้ คือ ปาสกาล นักคณิตศาสตร์ชาวฝรั่งเศส (มีชีวิตอยู่ระหว่าง ค.ศ. 1623 – 1662) จึงเรียกรูปแบบการเขียนจำนวนข้างต้นว่า **สามเหลี่ยมของปาสกาล (Pascal's Triangle)**

แบบฝึกหัด 1.7

1. จงใช้ทฤษฎีบททวินามในการกระจาย

(1) $(2s+w)^5$

....
....
....
....

(2) $(a-2b)^4$

....
....
....
....

(3) $\left(\frac{n}{2}-\frac{2}{n}\right)^6$

....
....
....
....

(4) $\left(x^2-\frac{5}{x}\right)^3$

....
....
....
....

(5) $(x^3-2)^7$

....
....
....
....

2. จงเขียนพจน์ที่ 1, 2, 3, 4 และ 8 ของการกระจาย $\left(x-\frac{2}{x}\right)^9$

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

3. จงหาพจน์ต่างๆต่อไปนี้

(1) พจน์ที่ 6 ของการกระจาย $(x + y)^{10}$

....
....
....
....

(2) พจน์ที่ 3 ของการกระจาย $(m^3-2)^5$

....
....
....
....

(3) พจน์ที่ 10 ของการกระจาย $\left(\tan^2\theta-1\right)^{15}$

....
....
....
....

(4) พจน์ที่ 7 ของการกระจาย $\left(p-\frac{r}{2}\right)^9$

....
....
....
....

4. จงเขียนสามเหลี่ยมของปาสกาลเริ่มตั้งแต่ $n = 1$ ถึง $n = 8$ แล้ว จงกระจาย $(a + b)^8$

....
....
....
....
....
....
....
....
....

5. จงหาสัมประสิทธิ์ของ $a^{10}b^3$ ซึ่งได้จากการกระจาย $(a + b)^{13}$

....
....
....
....

6. จงหาสัมประสิทธิ์ของ r^4s^5 ซึ่งได้จากการกระจาย $(2r + 3s)^9$

....
....
....
....

7. จงแสดงว่าในการกระจาย $(a+b)^n$ สัมประสิทธิ์ของ $a^{n-r}b^r$ และสัมประสิทธิ์ของ a^rb^{n-r} เท่ากัน

....
....
....
....
....
....
....

8. จงแสดงว่าจำนวนสับเซตของเซต A ซึ่งมีสมาชิก n ตัวเท่ากับ

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n-2}+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}$$

....
....
....
....
....
....
....
....
....

9. จงใช้ทฤษฎีบททวินามเพื่อแสดงว่า $2^n=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n-2}+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}$

....
....
....
....
....
....

10. จงหาพจน์ที่มี b^7 ของการกระจาย $(a+b)^{10}$

....
....
....
....
....
....

11. ในการกระจาย $\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)^{12}$ พจน์ที่ไม่มี x ปรากฏอยู่คือพจน์ที่เท่าใด และ จงเขียนพจน์นั้น

12. จงใช้ทฤษฎีบททวินามช่วยในการเขียนจำนวนที่กำหนดให้ต่อไปนี้ในรูปทศนิยม 4 ตำแหน่ง

(1) 1.02^4 (ข้อแนะนำ 1.02 = 1 + 0.02)

(2) 0.98^{12}

(3) 2.01^{10}

(4) 1.98^6

ตอนที่ 2 ความน่าจะเป็น

คำว่า "ความน่าจะเป็น" หรือ "โอกาส" เป็นคำที่มักจะพบในชีวิตประจำวัน เช่น ถ้าปีนี้ฝนตกหนัก โอกาสที่น้ำท่วมหมู่บ้านจะมีมาก โอกาสที่นักกีฬาไทยจะได้เหรียญทองในการแข่งขันโอลิมปิกเกมคราวหน้าจะมีมากกว่าครั้งที่แล้ว การคาดการณ์ล่วงหน้าของเหตุการณ์ต่าง ๆ ที่จะเกิดขึ้นส่วนใหญ่อาศัยข้อมูลของเหตุการณ์นั้น หรือ เหตุการณ์ทำนองเดียวกันที่เคยเกิดขึ้นมาก่อนแล้ว

2.1 การทดลองสุ่ม

การทดลองสุ่ม คือ การทดลองซึ่งทราบว่าผลลัพธ์อาจจะเป็นอะไรได้บ้างแต่ไม่สามารถบอกได้อย่างถูกต้องแน่นอนว่าในแต่ละครั้งที่ทดลองผลที่เกิดขึ้นจะเป็นอะไรในบรรดาผลลัพธ์ที่อาจเป็นได้เหล่านี้ เช่น ในการทอยลูกเต๋า 1 ลูก 1 ครั้ง แต้มที่ปรากฏบนหน้าลูกเต๋าอาจจะเป็น 1, 2, 3, 4, 5 หรือ 6 เรียกการทอดลูกเต๋าว่า **การทดลองสุ่ม** เรียกเซตของแต้มที่ปรากฏบนหน้าลูกเต๋าที่จะเป็นไปได้ทั้งหมดว่า **แซมเปิลสเปซ** หรือ**ปริภูมิตัวอย่าง** (sample space) เรียกเซตของแต้มที่ปรากฏบนหน้าลูกเต๋าที่ได้จากการทอดแต่ละครั้งว่า **เหตุการณ์**

ในกรณีทั่วไปให้บทนิยามของแซมเปิลสเปซดังนี้

บทนิยาม แซมเปิลสเปซ หรือ**ปริภูมิตัวอย่าง** คือ เซตที่มีสมาชิกเป็นผลลัพธ์ที่อาจจะเป็นไปได้ทั้งหมดของการทดลองสุ่ม

ตัวอย่างที่ 1 การทอดลูกเต๋าลูกเดียวหนึ่งครั้ง ถือว่าเป็นการทดลองสุ่ม เพราะสามารถบอกได้ว่าผลลัพธ์ที่อาจจะเกิดขึ้นคือแต้ม 1, 2, 3, 4, 5 หรือ 6 แต่บอกไม่ได้แน่นอนว่าเมื่อทอดลูกเต๋าแล้วจะได้แต้มใด

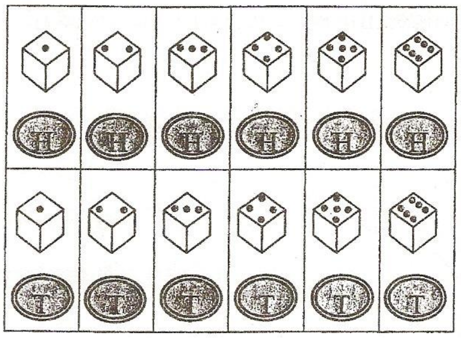
การทดลองสุ่มที่กล่าวข้างต้น ถ้าผลลัพธ์ที่น่าสนใจ คือ แต้มที่จะได้และให้ S_1 แทนแซมเปิลสเปซของการทดลองนี้ จะได้ $S_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

แต่ถ้าสนใจเพียงว่าแต้มที่ได้จะเป็นจำนวนคู่หรือจำนวนคี่ ผลที่ได้จากการทดลองอาจจะเป็นจำนวนคู่หรือจำนวนคี่อย่างใดอย่างหนึ่ง และถ้าให้ S_2 เป็นแซมเปิลสเปซของการทดลองสุ่มนี้แล้ว จะได้
S_2 = {จำนวนคู่, จำนวนคี่}

จะเห็นว่า ในการทดลองสุ่มเดียวกันอาจเขียนแซมเปิลสเปซได้มากกว่าหนึ่งแบบทั้งนี้ขึ้นอยู่กับผลลัพธ์ที่สนใจ

ตัวอย่างที่ 2 จงเขียนแซมเปิลสเปซของการทดลองโยนเหรียญ และทอดลูกเต๋าหนึ่งลูกพร้อมกันหนึ่งครั้ง

วิธีทำ ในการโยนเหรียญ 1 อัน และทอดลูกเต๋า1 ลูก อาจเกิดผลลัพธ์ดังนี้



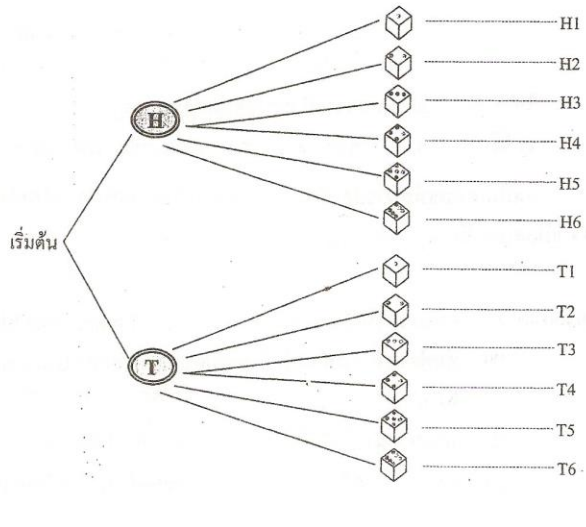
สามารถใช้แผนภาพต้นไม้ แสดงผลลัพธ์ที่อาจจะเกิดขึ้นได้ ดังนี้

ให้ S แทนแซมเปิลสเปซของการทดลองสุ่ม

H แทนเหรียญขึ้นหัว

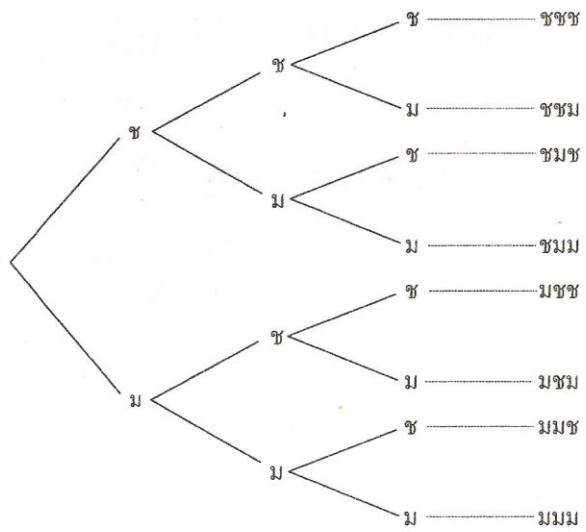
T แทนเหรียญขึ้นก้อย

ตัวเลข 1, 2, 3, 4, 5 และ 6 แทนลูกเต๋าขึ้นหน้า 1, 2, 3, 4, 5 และ 6 ตามลำดับ



จะได้ว่า S = {H1, H2, H3, H4, H5, H6, T1, T2, T3, T4, T5, T6}

ตัวอย่างที่ 3 ในการตรวจสภาพของสินค้าชนิดหนึ่งซึ่งผลิตจากเครื่องจักรโดยการหยิบขึ้นมาตรวจ 3 ชิ้น หยิบทีละชิ้นโดยไม่เจาะจงถือว่าเป็นการทดลองสุ่ม ถ้าผลลัพธ์ที่สนใจคือสภาพของสินค้าทั้งสามชิ้นที่หยิบขึ้นมาว่าชำรุดหรือไม่ชำรุด ให้สินค้าที่ชำรุดแทนด้วย “ช” และสินค้าที่ไม่ชำรุดแทนด้วย “ม” แซมเปิลสเปซเป็นเซตซึ่งประกอบด้วยสมาชิกดังนี้



ให้ S_1 แทนแซมเปิลสเปซของการทดลอง

จะได้ S_1 = {ชชช, ชชม, ชมช, ชมม, มชช, มชม, มมช, มมม}

แต่ถ้าผลลัพธ์ที่สนใจคือ จำนวนชิ้นที่ชำรุดโดยไม่สนใจว่าเรียงลำดับอย่างไร

แซมเปิลสเปซ คือ S_2 = {0, 1, 2, 3}

ตัวอย่างที่ 4 จงเขียนแซมเปิลสเปซของการทดลองสุ่มในแต่ละข้อต่อไปนี้

(1) ทีมฟุตบอล ก ลงแข่งขันกับทีมฟุตบอล ข และสนใจผลการแข่งขันของทีม ก

(2) โยนเหรียญหนึ่งอันสี่ครั้งและสนใจครั้งที่ขึ้นหัว

(3) ผลิตหลอดไฟฟ้า และสนใจจำนวนหลอดที่เสียเมื่อผลิตครบ 24 ชั่วโมง

(4) หยิบลูกปิงปองหนึ่งลูกออกจากกล่องซึ่งมีลูกปิงปองสีขาว สีแดงและสนใจว่าได้ลูกปิงปองสีใด

วิธีทำ ให้ S_1, S_2, S_3 และ S_4 เป็นแซมเปิลสเปซของการทดลองสุ่มที่ต้องการตามลำดับ

(1) เนื่องจากในการแข่งขันฟุตบอล ผลของการแข่งขันจะเป็นได้ 3 แบบ คือ ชนะ แพ้ หรือ เสมอ

ดังนั้น S_1 = {ชนะ, แพ้, เสมอ}

(2) ในการโยนเหรียญหนึ่งอันสี่ครั้ง จำนวนครั้งที่เหรียญจะขึ้นหัวอาจจะเป็น 1, 2, 3 หรือ 4 ครั้ง หรือไม่มีครั้งใดที่เหรียญจะขึ้นหัว ซึ่งเท่ากับ 0 ครั้ง

ดังนั้น S_2 = {0, 1, 2, 3, 4}

(3) เนื่องจากจำนวนหลอดไฟฟ้าที่ผลิตได้ในเวลา 24 ชั่วโมง อาจจะไม่มีหลอดที่เสีย หรือ หลอดที่เสีย 1, 2, 3, ... ซึ่งจำนวนหลอดที่เสียที่มากที่สุดจะเท่ากับจำนวนหลอดไฟฟ้า ที่ผลิตได้ทั้งหมด

ดังนั้น S_3 = {0, 1, 2, 3, ..., n}

(4) ลูกปิงปองที่อยู่ในกล่องมีสองสีคือ สีแดงและสีขาว

ดังนั้น S_1 = {สีแดง, สีขาว}

แบบฝึกหัด 2.1

จงเขียนแซมเปิลสเปซที่เกิดจากการทดลองสุ่มต่อไปนี้

1. โยนเหรียญหนึ่งเหรียญหนึ่งครั้ง

....

....

....

2. โยนเหรียญหนึ่งเหรียญสองครั้ง

....

....

....

3. โยนเหรียญสองเหรียญหนึ่งครั้ง

....

....

....

4. ทอดลูกเต๋าหนึ่งลูกหนึ่งครั้ง

....

....

....

5. ทอดลูกเต๋าหนึ่งลูกสองครั้ง

....

....

....

....

6. ทอดลูกเต๋าสองลูกหนึ่งครั้ง

....

....

....

....

7. หยิบสลาก 1 ใบ ที่ประกอบด้วยสลากที่มีรางวัล 2 ใบ และไม่มีรางวัล 3 ใบ

....

....

....

8. หยิบลูกบอล 2 ลูก ที่ประกอบด้วยลูกบอลสีเขียว 3 ลูก และสีฟ้า 2 ลูก

....

....

....

....

2.2 เหตุการณ์

ในการทดลองสุ่ม โดยการโยนเหรียญ 1 อัน 1 ครั้ง ถ้าให้ H แทนหัวและ T แทนก้อย จะได้แซมปิลสเปซของการทดลองคือ S = {H, T} ถ้าผลลัพธ์ที่สนใจคือ เหรียญขึ้นหัว เรียก ผลลัพธ์ที่ได้เหรียญขึ้นหัวว่า เหตุการณ์ที่เหรียญขึ้นหัว ให้ E แทนเหตุการณ์ที่เหรียญขึ้นหัว จะได้ E = {H} ซึ่งจะเห็นว่า E เป็นสับเซตของแซมเปิลสเปซ S

บทนิยาม เหตุการณ์ คือ สับเซตของแซมเปิลสเปซ

ตัวอย่างที่ 1 ในการทอดลูกเต๋าลูกเดียวหนึ่งครั้ง ถ้าผลลัพธ์ที่สนใจคือแต้มที่ได้ แซมเปิลสเปซ คือ

S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

ถ้า E_1 เป็นเหตุการณ์ที่แต้มซึ่งหารด้วย 3 ลงตัว จะได้ E_1 = {3, 6}

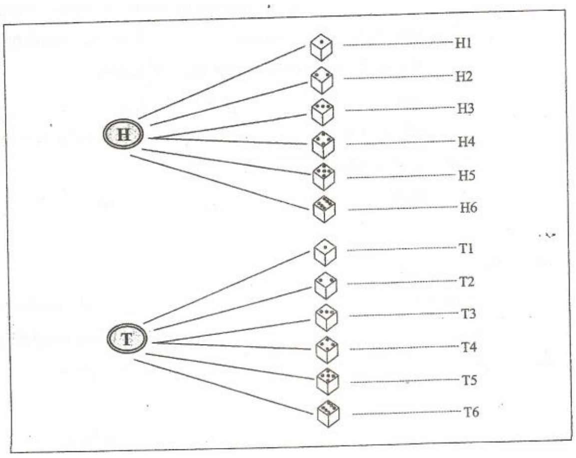
ถ้า E_2 เป็นเหตุการณ์ที่ได้แต้มต่ำกว่า 4 จะได้ E_2 = {1, 2, 3}

ตัวอย่างที่ 2 ในการโยนเหรียญ 1 เหรียญ และทอดลูกเต๋า 1 ลูก พร้อมกันหนึ่งครั้ง จงหา

1) เหตุการณ์ที่จะได้แต้มบนหน้าลูกเต๋าเป็นจำนวนคู่
2) เหตุการณ์ที่เหรียญจะขึ้นหัว
3) เหตุการณ์ที่เหรียญจะขึ้นก้อยและแต้มบนหน้าลูกเต๋าเป็น 6

วิธีทำ ให้ H แทน เหรียญหงายหน้าหัว T แทน เหรียญหงายหน้าก้อย

S แทนแซมเปิลสเปซของการโยนเหรียญ 1เหรียญ และทอดลูกเต๋า 1 ลูก พร้อมกัน



จะได้ S = {H1, H2, H3, H4, H5, H6, T1, T2, T3, T4, T5, T6}

1) ให้ E_1 แทนเหตุการณ์ที่จะได้แต้มบนหน้าลูกเต๋าเป็นจำนวนคู่
จะได้ E_1 = {H2, H4, H6, T2, T4, T6}

2) ให้ E_2 แทนเหตุการณ์ที่เหรียญจะขึ้นหัว
จะได้ E_2 = {H1, H2, H3, H4, H5, H6}

3) ให้ E_3 แทนเหตุการณ์ที่เหรียญจะขึ้นก้อยและแต้มบนหน้าลูกเต๋าเป็น 6
จะได้ E_3 = {T6}

ตัวอย่าง 3 ในการชั่งน้ำหนักนักเรียนแต่ละคนในชั้น ถ้าแทนเซตของผลของการชั่งน้ำหนักซึ่งมีหน่วยเป็นกิโลกรัมด้วยแซมเปิลสเปซ S จะได้ S = {W | W เป็นน้ำหนักของนักเรียนแต่ละคนในชั้น}

เหตุการณ์ที่สนใจอาจเป็นเหตุการณ์ที่น้ำหนักของนักเรียนแต่ละคนในชั้นนั้นเกิน 60 กิโลกรัม และถ้าแทนเหตุการณ์นี้ด้วย E_1 จะได้

E_1 = {W | W เป็นน้ำหนักของนักเรียนในชั้นที่มากกว่า 60 กิโลกรัม}

แต่ถ้าเหตุการณ์ที่สนใจคือน้ำหนักของนักเรียนแต่ละคนในชั้นนั้นที่หนักตั้งแต่ 50 กิโลกรัม ถึง 60 กิโลกรัม และแทนเหตุการณ์นี้ด้วย E_2 จะได้

E_2 = {W | 50 $\leq$ W $\leq$ 60}

2.2.1 ยูเนียนของเหตุการณ์

ถ้า E_1 และ E_2 เป็นเหตุการณ์สองเหตุการณ์แล้ว ยูเนียนของเหตุการณ์ E_1 และ E_2 คือ เหตุการณ์ซึ่งประกอบด้วยสมาชิกของเหตุการณ์ E_1 หรือของเหตุการณ์ E_2 หรือของทั้งสองเหตุการณ์เขียนแทน*ยูเนียนของเหตุการณ์ E_1 และ E_2* ด้วยสัญลักษณ์ $E_1 \cup E_2$

ตัวอย่างที่ 1 ในการทอดลูกเต๋าพร้อมกันสองลูก ถ้า E_1 เป็นเหตุการณ์ที่ได้ผลรวมของแต้มเป็น 10 และ E_2 เป็นเหตุการณ์ที่ได้ผลรวมของแต้มหารด้วย 5 ลงตัว จงหายูเนียนของเหตุการณ์ E_1 และ E_2

วิธีทำ แซมเปิลสเปซซึ่งเป็นเซตที่ประกอบด้วยผลรวมของแต้มบนลูกเต๋าทั้งสองที่อาจเป็นไปได้ทั้งหมดคือ

S = { 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 }

ดังนั้น E_1 = { 10 }

และ E_2 = { 5 }

จะได้ $E_1 \cup E_2$ = { 5, 10 } ซึ่งก็คือเหตุการณ์ที่ได้ผลรวมของแต้มเป็น 10 หรือผลรวมของแต้มหารด้วย 5 ลงตัว

2.2.2 อินเตอร์เซกชันของเหตุการณ์

ถ้า E_1 และ E_2 เป็นเหตุการณ์สองเหตุการณ์แล้ว อินเตอร์เซกชันของเหตุการณ์ E_1 และ E_2 คือเหตุการณ์ซึ่งประกอบด้วยสมาชิกที่อยู่ทั้งในเหตุการณ์ E_1 และเหตุการณ์ E_2 เขียนแทน*อินเตอร์เซกชันของเหตุการณ์ E_1 และ E_2* ด้วยสัญลักษณ์ $E_1 \cap E_2$

ตัวอย่างที่ 2 ในการทอดลูกเต๋าพร้อมกันสองลูก ถ้า E_1 เป็นเหตุการณ์ที่ได้ผลรวมของแต้มเป็น 10 และ E_2 เป็นเหตุการณ์ที่ได้ผลรวมของแต้มหารด้วย 5 ลงตัว แล้ว $E_1 \cap E_2$ คือเหตุการณ์ที่ได้ผลรวมของแต้มเป็น 10 และ หารด้วย 5 ลงตัว

ดังนั้น $E_1 \cap E_2$ = { 10 }

ตัวอย่างที่ 3 ในการรับสมัครคนเข้าทำงานของหน่วยงานแห่งหนึ่ง ถ้าให้ E_1 เป็นเหตุการณ์ที่ผู้สมัครต้องมีอายุตั้งแต่ 20 ปีขึ้นไป และ E_2 เป็นเหตุการณ์ที่ผู้สมัครจะต้องเป็นชาย แล้ว

$E_1 \cap E_2$ คือเหตุการณ์ที่ผู้สมัครต้องเป็นชายที่มีอายุตั้งแต่ 20 ปีขึ้นไป

2.2.3 เหตุการณ์ที่ไม่เกิดร่วมกัน

ถ้า E_1 และ E_2 เป็นเหตุการณ์สองเหตุการณ์แล้ว และ $E_1 \cap E_2 = \phi$ แล้ว จะเรียก เหตุการณ์ E_1 และ E_2 ว่า*เหตุการณ์ที่ไม่เกิดร่วมกัน*

ตัวอย่างที่ 4 ในการทอดลูกเต๋าหนึ่งลูกหนึ่งครั้ง ถ้า E_1 เป็นเหตุการณ์ที่ได้แต้มเป็นจำนวนคู่ และ E_2 เป็นเหตุการณ์ที่ได้แต้มเป็นจำนวนคี่

จะได้ E_1 = { 2, 4, 6 }

และ E_2 = { 1, 3, 5 }

เนื่องจาก $E_1 \cap E_2 = \phi$

ดังนั้น E_1 และ E_2 เป็นเหตุการณ์ที่ไม่เกิดร่วมกัน

หรือ ในการทอดลูกเต๋าหนึ่งลูกหนึ่งครั้ง เหตุการณ์ที่จะได้แต้มเป็นจำนวนคู่ และ เหตุการณ์ที่จะได้แต้มเป็นจำนวนคี่เป็นเหตุการณ์ที่ไม่เกิดร่วมกัน

ตัวอย่างที่ 5 ในการหยิบไพ่หนึ่งใบจากไพ่ทั้งสำรับ ถ้า E_1 เป็นเหตุการณ์ที่ได้โพแดง และ E_2 เป็นเหตุการณ์ที่ได้ดอกจิก แล้ว E_1 และ E_2 เป็นเหตุการณ์ที่ไม่เกิดร่วมกัน เพราะไพ่ใบหนึ่งจะเป็นทั้งโพแดงและดอกจิกในขณะเดียวกันไม่ได้

2.2.4 คอมพลีเมนต์ของเหตุการณ์

ถ้า S เป็นแซมเปิลสเปซ และ E เป็นเหตุการณ์ที่เป็นสับเซตของ S แล้ว คอมพลีเมนต์ของเหตุการณ์ E คือเหตุการณ์ที่ประกอบด้วยสมาชิกที่อยู่ใน S แต่ไม่อยู่ในเหตุการณ์ E เขียนแทน*คอมพลีเมนต์ของเหตุการณ์* E ด้วยสัญลักษณ์ E'

ตัวอย่างที่ 6 ในการหยิบไพ่หนึ่งใบจากไพ่ทั้งสำรับ ถ้า E_1 เป็นเหตุการณ์ที่ได้โพแดง และ E_2 เป็นเหตุการณ์ที่ได้ดอกจิก แล้ว E_1' = { โพดำ, ดอกจิก, ข้าวหลามตัด} และ E_2' = { โพดำ, โพแดง, ข้าวหลามตัด}

ตัวอย่างที่ 7 ในการสอบวิชาภาษาไทยซึ่งมีคะแนนเต็ม 10 คะแนน ถ้าพิจารณาเฉพาะคะแนนซึ่งเป็นจำนวนเต็มเท่านั้น แซมเปิลสเปซ S คือ S = { 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}
ถ้าให้ E เป็นเหตุการณ์ที่คะแนนของเด็กชายสยามเป็น 7 ขึ้นไป กล่าวคือ E = { 7, 8, 9, 10}
คอมพลีเมนต์ของเหตุการณ์ E คือเหตุการณ์ที่คะแนนของเด็กชายสยามน้อยกว่า 7 ซึ่ง ได้แก่ 0, 1, 2, 3, 4, 5 หรือ 6 ดังนั้น E' = { 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6}

แบบฝึกหัด 2.2

1. จากการทดลองสุ่มต่อไปนี้ จงเขียนแซมเปิลสเปซและเหตุการณ์ที่สนใจในการทดลองนั้น ๆ

(1) จากการโยนเหรียญสองเหรียญหนึ่งครั้ง ได้หัวสองหัว

....

....

....

(2) จากการโยนลูกเต๋าสองลูกหนึ่งครั้ง ได้ผลรวมของแต้มบนหน้าลูกเต๋าทั้งสองเป็น 3 หรือ 5

....

....

....

(3) ได้นักเรียนที่ถนัดมือซ้ายในห้องที่นักเรียนเรียนอยู่

....

....

....

(4) ได้ครอบครัวที่มีบุตรชายคนเดียวจากการสำรวจครอบครัวที่บุตร 3 คน

....

....

....

(5) ได้ลูกบอลสีเขียว 2 ลูกและสีฟ้า 1 ลูก จากการหยิบลูกบอล 2 ลูก ที่ประกอบด้วยลูกบอลสีเขียว 3 ลูก และสีฟ้า 2 ลูก

....

....

....

....

(6) ได้แต้มที่ต่างกันอยู่ 3 หรือแต้ม 5 จากลูกเต๋าลูกใดลูกหนึ่งในการทอดลูกเต๋าพร้อมกันสองลูก

....

....

....

....

(7) ได้หัวและแต้มที่น้อยกว่า 3 จากการทอดลูกเต๋าและโยนเหรียญหนึ่งเหรียญพร้อมกันหนึ่งครั้ง

....

....

....

....

(8) ได้ดินสอสีขาวหรือสีน้ำเงินจากการหยิบดินสอ 2 แท่ง จากกล่องดินสอที่มีดินสอ 5 แท่ง ซึ่งมีดินสอสีขาว ฟ้า ม่วง น้ำเงิน และเขียว

....

....

....

....

2. ถ้า S = { 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 }

E_1 = { 0, 2, 4, 6, 8 }

E_2 = { 1, 3, 5, 7, 9 }

E_3 = { 2, 3, 5, 7 }

และ E_4 = { 1, 4, 9 }

จงหาสมาชิกของ S ที่อยู่ในเหตุการณ์ต่อไปนี้

(1) $E_1 \cup E_2$ ....

(2) $E_1 \cap E_2$ ....

(3) E_3' ....

(4) $(S \cap E_3)'$ ....

(5) $\left(E_4 \cap E_3'\right) \cup E_1$ ....

(6) $E_2 \cap (E_3 \cup E_4)'$ ....

3. จากเหตุการณ์ $E_1,\ E_2$ และ E_3 ในข้อ 2 จงเขียนแผนภาพเวนน์-ออยเลอร์ แสดงเหตุการณ์ต่อไปนี้

(1) $E_1 \cap E_2{}'$

(2) $(E_2 \cap E_3) \cup E_1$

(3) $E_1 \cap \left(E_2 \cap E_3{}'\right)$

4. ในการสำรวจอายุของประชากรในหมู่บ้านแห่งหนึ่ง

ถ้า E_1 เป็น เหตุการณ์ที่ประชากรมีอายุตั้งแต่ 2 ปี ถึง 9 ปี

E_2 เป็น เหตุการณ์ที่ประชากรมีอายุน้อยกว่า 7 ปี

และ E_3 เป็น เหตุการณ์ที่ประชากรมีอายุมากกว่า 60 ปี

แล้ว

(1) $E_1 \cup E_2$ เป็น..

(2) $E_1 \cap E_2$ เป็น..

(3) $(E_1 \cup E_3) \cap E_2$ เป็น...

(4) $(E_1 \cap E_3) \cup E_2$ เป็น...

(5) $\left(E_1{}' \cap E_3{}'\right) \cup E_2$ เป็น...

5. ในการจับสลาก 1 ใบ จากสลาก 10 ใบ ซึ่งมีตัวเลข 0 ถึง 9 เขียนกำกับอยู่ ใบละหนึ่งตัวเลข ถ้าสุ่มจับสลากขึ้นมาหนึ่งใบและสนใจตัวเลขที่เขียนกำกับไว้ในสลากใบที่จับได้ โดยให้

E_1 เป็น เหตุการณ์ที่ตัวเลขที่เขียนกำกับไว้เป็นจำนวนคู่

E_2 เป็น เหตุการณ์ที่ตัวเลขที่เขียนกำกับไว้เป็นจำนวนคี่

E_3 เป็น เหตุการณ์ที่ตัวเลขที่เขียนกำกับไว้เป็นจำนวนเฉพาะ

และ E_4 เป็น เหตุการณ์ที่ตัวเลขที่เขียนกำกับไว้เป็นจำนวนที่หารด้วย 3 ลงตัว

จงเขียนเหตุการณ์ต่อไปนี้ในรูป E_1, E_2, E_3 หรือ E_4 พร้อมทั้งแจกแจงสมาชิกเมื่อ

(1) เหตุการณ์ที่ตัวเลขที่เขียนกำกับไว้เป็นจำนวนคู่หรือจำนวนเฉพาะ

= .... = ...

(2) เหตุการณ์ที่ตัวเลขที่เขียนกำกับไว้เป็นจำนวนคู่และหารด้วย 3 ลงตัว

= .... = ...

(3) เหตุการณ์ที่ตัวเลขที่เขียนกำกับไว้เป็นจำนวนเฉพาะที่หารด้วย 3 ไม่ลงตัว

= .... = ...

(4) เหตุการณ์ที่ตัวเลขที่เขียนกำกับไว้เป็นจำนวนคู่ที่เป็นจำนวนเฉพาะหรือจำนวนคี่

= .... = ...

6. จากการสอบถามนักเรียน 3 คน เกี่ยวกับการชอบเล่นกีฬา จงแจกแจงสมาชิกของ

(1) แซมเปิลสเปซ S โดยใช้อักษร “ช” แทนนักเรียนที่ชอบเล่นกีฬา และ “ม” แทนนักเรียนที่ไม่ชอบเล่นกีฬา

....

(2) เหตุการณ์ E_1 ที่นักเรียนทั้งสามคนชอบเล่นกีฬาอย่างน้อย 2 คน

....

(3) เหตุการณ์ E_2 ที่นักเรียนทั้งสามคนไม่ชอบเล่นกีฬาเลย

....

7. ในการทอดลูกเต๋าสองลูก สีเขียวและสีฟ้า

ถ้า E_1 เป็น เหตุการณ์ที่แต้มของลูกเต๋าสีเขียวเป็นจำนวนคู่

E_2 เป็น เหตุการณ์ที่แต้มของลูกเต๋าสีฟ้าเป็นจำนวนที่น้อยกว่า 5

และ E_3 เป็น เหตุการณ์ที่แต้มของลูกเต๋าทั้งสองเหมือนกัน

จงเขียนสมาชิกของเหตุการณ์ต่อไปนี้

(1) $E_1 \cup E_2$ = ...

(2) $E_2 \cap E_3$ = ...

(3) $E_1 \cup E_2 \cup E_3$ = ...

(4) $E_1 \cap E_2 \cap E_3$ = ...

2.3. ความน่าจะเป็น (Probability)

ความน่าจะเป็น เป็นจำนวนที่บอกให้ทราบว่าเหตุการณ์ที่สนใจมีโอกาสเกิดขึ้นมากหรือน้อยเพียงใด วิธีหนึ่งที่จะหาคำตอบได้ก็คือ ทำการทดลองสุ่มนั้นซ้ำหลาย ๆ ครั้ง ยิ่งมากเท่าใด ก็จะได้ค่าที่น่าเชื่อถือได้มากขึ้นเท่านั้น อย่างไรก็ดี วิธีนี้ไม่สามารถบอกได้แน่นอนว่าควรทำการทดลองมากเท่าใด อีกทั้งการทดลองสุ่มหลาย ๆ ครั้ง ย่อมเสียเวลามากและไม่สะดวก เราจึงใช้วิธีหาความน่าจะเป็นโดยใช้การคำนวณจากอัตราส่วนระหว่างจำนวนสมาชิกของเหตุการณ์ที่สนใจกับจำนวนสมาชิกของแซมเปิลสเปซ ทั้งนี้แซมเปิลสเปซที่ใช้ในการคำนวณนี้ต้องเป็นเซตจำกัดและประกอบด้วยสมาชิกที่มีโอกาสเกิดขึ้นได้เท่า ๆ กัน

พิจารณาตัวอย่าง ในการทอดลูกเต๋าลูกเดียวหนึ่งครั้ง ถ้าเหตุการณ์ที่สนใจคือได้แต้ม 3

แซมเปิลสเปซคือ S = { 1, 2, 3, 4, 5, 6 } ซึ่งสมาชิกแต่ละตัวของ S มีโอกาสเกิดขึ้นเท่า ๆ กัน

ส่วนเหตุการณ์ที่สนใจ คือ E = { 3 }

โอกาสที่เหตุการณ์ E จะเกิดขึ้นเท่ากับ $\frac{1}{6}$ ซึ่งเป็นอัตราส่วนระหว่างจำนวนสมาชิกของ E กับ จำนวนสมาชิกของ S

พิจารณาตัวอย่าง ในการทอดลูกเต๋าสองลูกหนึ่งครั้ง ถ้าเหตุการณ์ที่สนใจคือได้ผลรวมของแต้มเป็น 5

อาจเขียนแซมเปิลสเปซเป็น S_1 = { 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 } และ E_1 = { 5 }

เนื่องจาก สมาชิกแต่ละตัวของ S_1 ในที่นี้มีโอกาสเกิดขึ้นไม่เท่ากัน เช่น การที่จะได้ผลรวมของแต้มเป็น 2 มีโอกาสที่จะเกิดขึ้นได้วิธีเดียว คือ ลูกเต๋าลูกแรกหงายหน้า 1 และลูกเต๋าลูกที่สองหงายหน้า 2 แต่การที่จะได้ผลรวมของแต้มเป็น 4 มีโอกาสที่จะเกิดขึ้นได้ 3 วิธี คือ

ลูกเต๋าลูกแรกหงายหน้า 1 และลูกเต๋าลูกที่สองหงายหน้า 3

ลูกเต๋าลูกแรกหงายหน้า 2 และลูกเต๋าลูกที่สองหงายหน้า 2

หรือ ลูกเต๋าลูกแรกหงายหน้า 3 และลูกเต๋าลูกที่สองหงายหน้า 1

จะเห็นได้ว่าการที่จะได้ผลรวมของแต้มเป็น 4 มีโอกาสเกิดขึ้นได้มากกว่าการที่จะได้ผลรวมของแต้มเป็น 2 ดังนั้นในการคำนวณหาโอกาสที่จะได้ผลรวมของแต้มเป็น 5 จะต้องพิจารณาแซมเปิลสเปซ S_2 ซึ่งประกอบด้วยสมาชิกที่มีโอกาสเกิดขึ้นได้เท่า ๆ กันรวม 36 วิธีที่อาจเป็นไปได้จากการทอดลูกเต๋าสองวิธี ดังนี้

ให้ S_2 = { (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6),
(2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6),
(3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6),
(4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6),
(5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6),
(6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6) }

และ E_2 แทน เหตุการณ์ที่สนใจคือได้ผลรวมของแต้มเป็น 5 จะได้ E_2 = { (1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1) }

ดังนั้น โอกาสที่จะได้ผลรวมของแต้มเป็น 5 คือ อัตราส่วนระหว่างจำนวนสมาชิกของ E_2 กับ จำนวนสมาชิกของ S_2 ซึ่งเท่ากับ $\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$

ถ้าสมาชิกของแซมเปิลสเปซมีโอกาสเกิดขึ้นเท่า ๆ กันแล้ว เรียกอัตราส่วนระหว่างจำนวนสมาชิกของเหตุการณ์ที่สนใจกับจำนวนสมาชิกของแซมเปิลสเปซ ว่า *ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์*

บทนิยาม ถ้า N เป็นจำนวนสมาชิกของแซมเปิลสเปซ S ซึ่งประกอบด้วยสมาชิกที่มีโอกาสเกิดขึ้นได้เท่า ๆ กัน และ n เป็นสมาชิกของเหตุการณ์ ซึ่งเป็นสับเซตของ S แล้ว ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ E เท่ากับ $\frac{n}{N}$

ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ E เขียนแทนด้วย $P(E)$

หมายเหตุ อาจเขียน $P(E) = \frac{n(E)}{n(S)}$ เมื่อ $n(E)$ เป็นจำนวนสมาชิกของเหตุการณ์ E และ $n(S)$ เป็นจำนวนสมาชิกของแซมเปิลสเปซ S ซึ่งประกอบด้วยสมาชิกที่มีโอกาสเกิดขึ้นได้เท่า ๆ กัน

อาจกล่าวได้ว่า ความน่าจะเป็น เป็นจำนวนที่บอกให้ทราบว่าเหตุการณ์ที่เราสนใจมีโอกาสเกิดขึ้นมากน้อยเพียงใด กล่าวคือ

ถ้า $P(E) = 0$ หมายความว่า เหตุการณ์ E ไม่มีโอกาสเกิดขึ้นเลย

ถ้า $P(E) = 1$ หมายความว่า เหตุการณ์ E เกิดขึ้นแน่นอน

ถ้า $P(E) = \frac{1}{2}$ หมายความว่า เหตุการณ์ E มีโอกาสเกิดขึ้นและไม่เกิดขึ้นมีเท่าๆกัน

ถ้า $P(E_1) = \frac{2}{5}$ และ $P(E_2) = \frac{3}{5}$ หมายความว่า เหตุการณ์ E_1 มีโอกาสเกิดขึ้นน้อยกว่าเหตุการณ์ E_2 เป็นต้น

อาจสรุปสมบัติของความน่าจะเป็น ได้ดังนี้

(1) ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ E ใด ๆ จะมีค่าตั้งแต่ 0 ถึง 1 เสมอ

นั่นคือ $0 \le P(E) \le 1$

(2) ความน่าจะเป็นของแซมเปิลสเปซ S มีค่าเท่ากับ 1

นั่นคือ $P(S) = 1$

(3) ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่เป็นเซตว่างมีค่าเท่ากับ 0

นั่นคือ $P(\phi) = 0$

ตัวอย่างที่ 1 โยนเหรียญที่เที่ยงตรง 2 อัน 1 ครั้ง จงหาความน่าจะเป็นทีเหรียญขึ้นหน้าเหมือนกัน

วิธีทำ S = { (หัว,หัว),(หัว,ก้อย),(ก้อย,หัว),(ก้อย,ก้อย) } , n(S) = 4

E = { (หัว,หัว),(ก้อย,ก้อย) } , $n(E) = 2$

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)}$$

$$= \frac{2}{4}$$

$$= \frac{1}{2}$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นของการที่เหรียญขึ้นหน้าเหมือนกัน = $\frac{1}{2}$

ตัวอย่างที่ 2 กล่องใบหนึ่งมีลูกบอลสีแดง 3 ลูก สีขาว 2 ลูก สุ่มหยิบลูกบอลจากกล่อง 2 ลูก พร้อมกัน จงหาความน่าจะเป็นของการหยิบได้ลูกบอลสีต่างกัน

วิธีทำ $n(S)$ = จำนวนวิธีในการหยิบลูกบอล 2 ลูกพร้อมกันจากลูกบอลทั้งหมด 5 ลูก

$= \binom{5}{2} = \frac{5!}{2!3!} =$ 10 วิธี

$n(E)$ = จำนวนวิธีในการหยิบให้ได้ลูกบอลสีต่างกัน

$= \binom{3}{1}\binom{5}{2} = (3)(2) =$ 6 วิธี

$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นของการหยิบได้ลูกบอลสีต่างกัน $= \frac{3}{5}$

ตัวอย่างที่ 3 มีหลอดไฟลักษณะเหมือนกันอยู่ 6 หลอด เป็นสีแดง 3 หลอด สีเหลือง 2 หลอด และสีเขียว 1 หลอด นำหลอดไฟทั้งหมดมาประดับรอบเสาต้นหนึ่ง จาหาความน่าจะเป็นของการที่หลอดไฟสีเดียวกันจะอยู่ติดกัน

วิธีทำ $n(S)$ = จำนวนวิธีการเรียงหลอดไฟทั้งหมดเป็นวงกลม

$= \frac{(6-1)!}{3!2!}$

$= \frac{5!}{3!2!}$

= 10 วิธี

$n(E)$ = จำนวนวิธีการในการเรียงหลอดไฟให้สีเดียวกันอยู่ติดกัน

$= (3-1)!$

= 2 วิธี

$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)}$

$= \frac{2}{10}$

$= \frac{1}{5}$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นของการที่หลอดไฟสีเดียวกันจะอยู่ติดกัน $= \frac{1}{5}$

ตัวอย่างที่ 4 ในการเลือกตัวเลขสองตัวโดยไม่เจาะจงจาก { 1 , 2 , 3 , 4 , 5 } โดยเลือกทีละตัวและไม่ซ้ำกัน จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้เลขสองตัวที่มีผลบวกเป็น 6

วิธีทำ วิธีเลือกตัวเลขตัวที่หนึ่งมีได้ 5 วิธี และวิธีเลือกตัวเลขตัวที่สองมีได้ 4 วิธี

ดังนั้น วิธีเลือกตัวเลขสองตัวที่ไม่ซ้ำกันมีทั้งหมด $= 5 \times 4$

= 20 วิธี

ให้ E เป็นเหตุการณ์ที่เลือกได้ตัวเลขสองตัวที่มีผลบวกเป็น 6

จะได้ E = { (1,5),(2,4),(4,2),(5,1) }

$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)}$

$= \frac{4}{20}$

$= \frac{1}{5}$

นั่นคือ ความน่าจะเป็นที่จะได้เลขสองตัวที่มีผลบวกเป็น 6 $= \frac{1}{5}$

แบบฝึกหัด 2.3

1. ในกล่องใบหนึ่งมีลูกบอลสีแดง 2 ลูก และสีเหลือง 2 ลูก ถ้าทำการทดลองสุ่มโดยหยิบลูกบอลมา 2 ลูก พร้อมกัน ให้หาความน่าจะเป็นที่จะหยิบได้ลูกบอลทั้งสองลูกเป็นสีเดียวกัน

....

....

....

2. จงหาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ต่อไปนี้

(1) ได้หัวสองหัวจากการโยนเหรียญสองเหรียญหนึ่งครั้ง

....

....

....

(2) ได้ผลรวมของแต้มบนหน้าลูกเต๋าทั้งสองเป็น 3 หรือ 5 จากการโยนลูกเต๋าสองลูกหนึ่งครั้ง

....

....

....

(3) ได้ชื่อของนักเรียนที่ถนัดมือซ้ายในห้องที่นักเรียนเรียนอยู่ จากการสุ่มชื่อของนักเรียนมาหนึ่งคน

....

....

....

(4) ได้ครอบครัวที่มีบุตรชายคนเดียวจากการสำรวจครอบครัวที่บุตร 3 คน

....

....

....

(5) ได้ลูกบอลสีเขียว 2 ลูกและสีฟ้า 1 ลูก จากการหยิบลูกบอล 2 ลูก ที่ประกอบด้วยลูกบอลสีเขียว 3 ลูก และสีฟ้า 2 ลูก

....

....

....

(6) ได้แต้มที่ต่างกันอยู่ 3 หรือแต้ม 5 จากลูกเต๋าลูกใดลูกหนึ่งในการทอดลูกเต๋าพร้อมกันสองลูก

....

....

....

(7) ได้หัวและแต้มที่น้อยกว่า 3 จากการทอดลูกเต๋าและโยนเหรียญหนึ่งเหรียญพร้อมกันหนึ่งครั้ง

....

....

....

(8) ได้ดินสอสีขาวหรือสีน้ำเงินจากการหยิบดินสอ 2 แท่ง จากกล่องดินสอที่มีดินสอ 5 แท่ง ซึ่งมีดินสอสีขาว ฟ้า ม่วง น้ำเงิน และเขียว

....

....

....

3. ถ้า S = { 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 }

E_1 = { 0, 2, 4, 6, 8 }

E_2 = { 1, 3, 5, 7, 9 }

E_3 = { 2, 3, 5, 7 }

และ E_4 = { 1, 4, 9 }

จงหาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ต่อไปนี้

(1) $P(E_1 \cup E_2)$ ....

(2) $P(E_1 \cap E_2)$ ....

(3) $P(E_3')$ ....

(4) $P\left(\left(S \cap E_3\right)'\right)$ ....

(5) $P\left(\left(E_4 \cap E_3'\right) \cup E_1\right)_1$ ....

(6) $P\left(E_2 \cap \left(E_3 \cap E_4\right)'\right)$ ....

4. จากการสอบถามนักเรียน 3 คน เกี่ยวกับการชอบเล่นกีฬา จงความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ต่อไปนี้

(1) เหตุการณ์ E_1 ที่นักเรียนทั้งสามคนชอบเล่นกีฬาอย่างน้อย 2 คน

....

....

....

(2) เหตุการณ์ E_2 ที่นักเรียนทั้งสามคนไม่ชอบเล่นกีฬาเลย

....

....

....

5. ในการจับสลากชื่อของนักเรียนจำนวน 30 คน ซึ่งเป็นชาย 18 คน จงหาความน่าจะเป็นในการที่จับสลากใบแรกได้

(1) นักเรียนชาย

....

....

....

(2) นักเรียนหญิง

....

....

....

6. ถุงใบหนึ่งใส่เหรียญบาทไว้ 100 อัน เหรียญแต่ละอันเขียนเลขกำกับไว้โดยไม่ซ้ำกันเริ่มจาก 1 ถึง 100 ถ้าหยิบเหรียญอันหนึ่งออกมาโดยการสุ่ม จงหาความน่าจะเป็นที่เลขซึ่งเขียนกำกับไว้เป็นดังข้อต่อไปนี้

(1) จำนวนคู่

....

....

....

(2) จำนวนที่มีรากที่สองเป็นจำนวนเต็ม

....

....

....

(3) จำนวนที่มีรากที่สามเป็นจำนวนเต็ม

....

....

....

(4) จำนวนที่หารด้วย 5 ลงตัว

....

....

....

(5) จำนวนคี่หรือจำนวนที่หารด้วย 3 ลงตัว

....

....

....

(6) จำนวนคู่และมีรากที่สามเป็นจำนวนเต็ม

....

....

....

7. ถ้านักเรียน 100 คน สวมรองเท้าขนาดต่างๆกัน ดังแสดงในตารางต่อไปนี้

ขนาดรองเท้า	5	6	7	8	9	10
จำนวนนักเรียน	3	12	35	27	16	7

จงหาความน่าจะเป็นที่นักเรียนคนหนึ่งจะสวมรองเท้าขนาด

(1) 7

....

....

(2) เล็กกว่า 8

....

....

(3) 8 หรือ 9

....

....

(4) 5 หรือ 10

....

....

(5) ใหญ่กว่า 7

....

....

(6) 7 และ 5

....

....

8. ในโรงเรียนแห่งหนึ่งมีนักเรียน 400 คน และมีนักเรียนที่เป็นฝาแฝด 2 คู่ ถ้าเลือกนักเรียนคนหนึ่งโดยการสุ่ม จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้นักเรียนที่มีคู่แฝด

....

....

....

9. ในกล่องใบหนึ่งมีหลอดไฟอยู่ 5 หลอด ในจำนวนนี้มีหลอดดีอยู่ 3 หลอด และหลอดเสียอยู่ 2 หลอด ถ้าหยิบหลอดไฟขึ้นมา 2 หลอด อย่างไม่เจาะจง จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้หลอดไฟเสีย 1 หลอด และ หลอดไฟดี 1 หลอด

....

....

....

10. ในการสอบวิชาภาษาไทย นักเรียนคนหนึ่งจะต้องอ่านบทละคร เรื่องสั้นและโคลง จงหาความน่าจะเป็นที่นักเรียนคนนี้จะถูกกำหนดให้อ่านโคลงเป็นอันดับแรก

....

....

....

11. ในการจัดเด็กผู้ชาย 5 คน เด็กหญิง 5 คน ให้ยืนเรียงแถวหน้ากระดาน จงหาความน่าจะเป็นที่

(1) เด็กชาย ก จะต้องยืนอยู่หัวแถวเสมอ

....

....

....

(2) เด็กชาย ก ยืนอยู่หัวแถวเสมอและเด็กผู้ชายและเด็กผู้หญิงต้องยืนสลับกัน

....

....

....

(3) เด็กชาย ก ยืนอยู่ทางด้านซ้ายมือของเด็กชาย ข เสมอ

....

....

....

12. ต้องการนำอักษรในคำว่า SPECTRUM มาเรียงเป็นคำที่ประกอบด้วยตัวอักษร 4 ตัวโดยไม่คำนึงความหมายและในแต่ละคำต้องไม่มีตัวอักษรซ้ำ จงหาความน่าจะเป็นที่จะจัดให้อักษรตัวสุดท้ายเป็นสระเสมอ

....

....

....

13. ในการจัดให้นักเรียน 6 คน นั่งประชุมรอบโต๊ะกลม จงหาความน่าจะเป็นที่นักเรียน 2 คน คือ ก และ ข ได้นั่งติดกัน

....

....

....

14. ในการสัมมนาทางวิชาการครั้งหนึ่งมีโรงเรียนส่งครูเข้าสัมมนา 20 โรงเรียน ๆ ละ 5 คน โดยแต่ละคนมาจากแต่ละสาขาดังนี้ คือ คณิตศาสตร์ วิทยาศาสตร์ทั่วไป ฟิสิกส์ เคมีและชีววิทยา ถ้าจะจัดคณะกรรมการที่ประกอบด้วยกรรมการ 10 คน จงหาความน่าจะเป็นที่

(1) กรรมการทั้ง 10 คนนี้มาจากสาขาวิชาละ 2 คน

....

. ...

....

(2) กรรมการทั้ง 10 คนนี้มาจากสาขาวิชาละ 2 คน และมาจากโรงเรียนที่ไม่ซ้ำกัน

....

....

2.4 กฎที่สำคัญบางประการของความน่าจะเป็น

กฎข้อที่ 1 ถ้า E_1 และ E_2 เป็นเหตุการณ์ใด ๆ ที่เป็นสับเซตของแซมเปิลสเปซ S แล้ว

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cup E_2)$$

กฎข้อที่ 2 ถ้า E_1 และ E_2 เป็นเหตุการณ์ใด ๆ ที่ไม่เกิดร่วมกันแล้ว

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2)$$

กฎข้อที่ 3 ถ้า E เป็นเหตุการณ์ใด ๆ ที่เป็นสับเซตของแซมเปิลสเปซ S แล้ว

$$P(E') = 1 - P(E)$$

วิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม ค33202 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2563

ให้นักเรียนพิสูจน์กฎที่สำคัญบางประการของความน่าจะเป็นทั้งสามข้อ

กฎข้อที่ 1 ถ้า E_1 และ E_2 เป็นเหตุการณ์ใด ๆ ที่เป็นสับเซตของแซมเปิลสเปซ S แล้ว

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cup E_2)$$

กฎข้อที่ 2 ถ้า E_1 และ E_2 เป็นเหตุการณ์ใด ๆ ที่ไม่เกิดร่วมกันแล้ว

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2)$$

กฎข้อที่ 3 ถ้า E เป็นเหตุการณ์ใด ๆ ที่เป็นสับเซตของแซมเปิลสเปซ S แล้ว

$$P(E') = 1 - P(E)$$

ตัวอย่างที่ 5 หมู่บ้านแห่งหนึ่งมีประชากรอาศัยอยู่ 200 ครอบครัว มีครอบครัวที่ปลูกข้าว 100 ครอบครัว ปลูกข้าวโพด 120 ครอบครัว และปลูกทั้งข้าวและข้าวโพด 40 ครอบครัว จงหาความน่าจะเป็นในการสุ่มได้ครอบครัวหนึ่งในหมู่บ้านนี้ที่ปลูกข้าวหรือข้าวโพด

วิธีทำ ให้ E_1 เป็นเซตของครอบครัวที่ปลูกข้าว

E_2 เป็นเซตของครอบครัวที่ปลูกข้าวโพด

เขียนแผนภาพแสดงจำนวนสมาชิกในแต่ละส่วนได้ดังนี้ (ให้นักเรียนเขียนแผนภาพ)

จากแผนภาพ $n(E_1 \cup E_2)$ = 180 และ $n(S)$ = 200

$$P(E) = \frac{n(E_1 \cup E_2)}{n(S)}$$

$$= \frac{180}{200}$$

$$= \frac{9}{10}$$ หรือ 0.9

หรือใช้กฎของความน่าจะเป็นคือ $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cup E_2)$

$$= \frac{100}{200} + \frac{120}{200} - \frac{40}{200}$$

$$= \frac{180}{200}$$

$$= \frac{9}{10}$$ หรือ 0.9

ดังนั้น ความน่าจะเป็นในการสุ่มได้ครอบครัวหนึ่งที่ปลูกข้าวหรือข้าวโพด = 0.9

ตัวอย่างที่ 6 เด็กคนหนึ่งมีลูกแก้วขนาดเดียวกัน 4 ลูก เป็นสีแดง 2 ลูก สีเขียวและสีเหลืองอย่างละ 1 ลูก จงหาความน่าจะเป็นที่เด็กคนนี้หยิบลูกแก้วขึ้นมาหนึ่งลูก

(1) ได้ลูกแก้วสีแดงหรือสีเขียว

(2) ไม่ได้ลูกแก้วสีแดงหรือสีเขียว

วิธีทำ ให้ E_1 เป็นเซตของเหตุการณ์ที่หยิบได้ลูกแก้วสีแดง

และ E_2 เป็นเซตของเหตุการณ์ที่หยิบได้ลูกแก้วสีเขียว

(1) หยิบลูกแก้วขึ้นมาเพียงหนึ่งลูก E_1 และ E_2 จึงเป็นเหตุการณ์ที่ไม่เกิดร่วมกัน

ดังนั้น $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2)$

$$= \frac{2}{4} + \frac{1}{4}$$

$$= \frac{3}{4}$$

$$= 0.75$$

ความน่าจะเป็นของการหยิบได้ลูกแก้วสีแดงหรือสีเขียว = 0.75

(2) เหตุการณ์ที่หยิบไม่ได้ลูกแก้วสีแดงหรือสีเขียวคือ $(E_1 \cup E_2)$

จากกฎของความน่าจะเป็น $P(E_1 \cup E_2)$ = 1 - $P(E_1 \cup E_2)$

= 1 - 0.75

= 0.25

ความน่าจะเป็นของการหยิบไม่ได้ลูกแก้วสีแดงหรือสีเขียว = 0.25

ตัวอย่างที่ 7 กล่องใบหนึ่งมีลูกแก้วสีแดง 5 ลูก สีขาว 3 ลูก ถ้าสุ่มหยิบขึ้นมา 2 ลูกพร้อมกัน จงหาความน่าจะเป็นของการหยิบได้ลูกแก้วสีเดียวกัน

วิธีทำ ให้ S เป็นเซตของการหยิบลูกแก้ว 2 ลูก จากทั้งหมด 8 ลูก

$n(S)$ = $\binom{8}{2}$ = ... = ...

ให้ E_1 เป็นเหตุการณ์ที่หยิบได้ลูกแก้วสีแดงทั้ง 2 ลูก

$n(E_1)$ = $\binom{5}{2}$ = ... = ...

ให้ E_2 เป็นเหตุการณ์ที่หยิบได้ลูกแก้วสีขาวทั้ง 2 ลูก

$n(E_2)$ = $\binom{3}{2}$ = ... = ...

เนื่องจาก E_1 และ E_2 เป็นเหตุการณ์ที่ไม่เกิดร่วมกัน

ดังนั้น $P(E_1 \cup E_2)$ = $P(E_1)+P(E_2)$

= ....

= ....

= ....

ความน่าจะเป็นของการหยิบได้ลูกแก้วสีเดียวกัน เท่ากับ ....

ข้อสังเกต เราสามารถนำความรู้เรื่องเซตมาหาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่เกี่ยวข้องกันตั้งแต่สามเหตุการณ์ขึ้นไปได้ ดังตัวอย่าง การพิสูจน์ ต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 8 จงพิสูจน์ว่า $P(E_1 \cup E_2 \cup E_3)$ = $P(E_1)$ + $P(E_2)$ + $P(E_3)$ – $P(E_1 \cap E_2)$ – $P(E_2 \cap E_3)$– $P(E_3 \cap E_1)$ + $P(E_1 \cap E_2 \cap E_3)$

เนื่องจาก $n(E_1 \cup E_2 \cup E_3)$ = $n(E_1)$ + $n(E_2)$ + $n(E_3)$ – $n(E_1 \cap E_2)$ – $n(E_2 \cap E_3)$ – $n(E_3 \cap E_1)$ + $n(E_1 \cap E_2 \cap E_3)$

และ $P(E) = \frac{n(E)}{n(S)}$

ดังนั้น $P(E_1 \cup E_2 \cup E_3)$ = ...

....

....

....

....

....

ตัวอย่างที่ 9 จากการสำรวจการทำกสิกรรมของเกษตรกรในตำบลหนึ่ง พบว่า เป็นดังนี้

ทำนา 54 ครอบครัว ทำสวน 53 ครอบครัว ทำไร่ 52 ครอบครัว

ทำนาและทำไร่ 22 ครอบครัว ทำไร่และทำสวน 23 ครอบครัว ทำสวนและทำนา 24 ครอบครัว

ทำนาและทำไร่และทำสวน 10 ครอบครัว

ถ้าสุ่มเกษตรกรดังกล่าวขึ้นมา 1 ครอบครัว จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้ครอบครัวเกษตรกรที่ทำนาเพียงอย่างเดียว

วิธีทำ ให้ E_1 แทน เหตุการณ์ที่สุ่มได้ครอบครัวเกษตรกรที่ทำนา

E_2 แทน เหตุการณ์ที่สุ่มได้ครอบครัวเกษตรกรที่ทำสวน

และ E_3 แทน เหตุการณ์ที่สุ่มได้ครอบครัวเกษตรกรที่ทำไร่

เนื่องจาก $n(E_1 \cup E_2 \cup E_3) = n(E_1) + n(E_2) + n(E_3) - n(E_1 \cap E_2) - n(E_2 \cap E_3)$
$- n(E_3 \cap E_1) + n(E_1 \cap E_2 \cap E_3)$

ให้ E_4 แทนเหตุการณ์ที่สุ่มได้ครอบครัวเกษตรกรที่ที่ทำนาเพียงอย่างเดียว

จะได้ว่า $n(E_4) = n(E_1) - n(E_1 \cap E_2) - n(E_1 \cap E_3) + n(E_1 \cap E_2 \cap E_3)$

= ....

= ....

เนื่องจาก การสำรวจการทำกสิกรรมนี้ พบว่า $n(S) = n(E_1 \cup E_2 \cup E_3)$

ดังนั้น $P(E_4)$ = ...

= ....

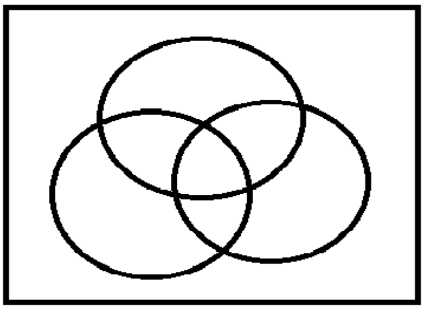
จะได้ว่า ถ้าสุ่มเกษตรกรดังกล่าวขึ้นมา 1 ครอบครัว ความน่าจะเป็นที่จะได้ครอบครัวเกษตรกรที่ทำนาเพียงอย่างเดียวเป็น............................

หมายเหตุ ในตัวอย่างนี้ อาจใช้แผนภาพเวนน์-ออยเลอร์ช่วยหาคำตอบก็ได้ ดังนี้

ให้ E_1 แทน เหตุการณ์ที่สุ่มได้ครอบครัวเกษตรกรที่ทำนา

E_2 แทน เหตุการณ์ที่สุ่มได้ครอบครัวเกษตรกรที่ทำสวน

และ E_3 แทน เหตุการณ์ที่สุ่มได้ครอบครัวเกษตรกรที่ทำไร่



จะได้ว่า ถ้าสุ่มเกษตรกรดังกล่าวขึ้นมา 1 ครอบครัว ความน่าจะเป็นที่จะได้ครอบครัวเกษตรกรที่ทำนาเพียงอย่างเดียวเป็น............................

แบบฝึกหัด 2.5

1. ถ้า E_1 และ E_2 เป็นเหตุการณ์ที่ไม่เกิดร่วมกัน และ $P(E_1) = 0.4$ และ $P(E_2) = 0.5$ จงหา

(1) $P(E_1 \cup E_2)$

....
....
....
....

(2) $P\left(E_1'\right)$

....
....
....
....

(3) $P\left(E_1' \cap E_2\right)$

....
....
....
....
....

(4) $P\left(E_1 \cup E_2'\right)$

....
....
....
....
....

2. ชาย 12 คน ไปรับประทานอาหารที่ร้านแห่งหนึ่ง ถ้ามีผู้สั่งข้าวผัด 8 คน ก๋วยเตี๋ยว 4 คน และสั่งทั้งข้าวผัดและก๋วยเตี๋ยว 2 คน จงหาความน่าจะเป็นในการที่ชายคนใดคนหนึ่งจะสั่งข้าวผัดหรือก๋วยเตี๋ยว

....
....
....
....
....
....
....
....

3. ถ้า S เป็นเซตของคน 100 คน ในจำนวนนี้เป็นชาย 60 คน เป็นผู้ถนัดมือซ้าย 22 คน และเป็นนักบาสเกตบอล 39 คน จากจำนวนดังกล่าวมีผู้ที่เป็นชายถนัดมือซ้าย 10 คน เป็นชายและเป็นนักบาสเกตบอลด้วย 4 คน และเป็นชายที่ถนัดมือซ้ายและเป็นนักบาสเกตบอลด้วย 2 คน จงหาความน่าจะเป็นที่คน ๆ หนึ่งจะเป็น

(1) ชายหรือถนัดมือซ้าย

....
....
....
....

(2) นักบาสเกตบอลหรือถนัดมือซ้าย

....
....
....
....

(3) ชายหรือนักบาสเกตบอล

....
....
....
....

4. ในการดึงไพ่ 5 ใบออกจากสำรับหนึ่งซึ่งมี 52 ใบ จงหาความน่าจะเป็นที่ไพ่ทั้งหมดเป็นไพ่ชุดเดียวกัน

....
....
....
....
....

5. เด็กคนหนึ่งมีลูกแก้วขนาดเดียวกัน 9 ลูก เป็นสีแดง 2 ลูก สีเขียว 3 ลูกและที่เหลือเป็นสีเหลือง จงหาความน่าจะเป็นที่เด็กคนนี้หยิบลูกแก้วขึ้นมาหนึ่งลูก

(1) ได้ลูกแก้วสีแดงหรือสีเขียว

(2) ไม่ได้ลูกแก้วสีแดงหรือสีเขียว

....
....
....
....
....
....
....
....
....

6. กล่องใบหนึ่งมีลูกแก้วสีแดง 5 ลูก สีขาว 3 ลูก ถ้าสุ่มหยิบขึ้นมา 2 ลูกพร้อมกัน จงหา ความน่าจะเป็นของการหยิบได้ลูกแก้วสีเดียวกัน

....

....

....

....

....

....

7. มีสลาก 14 ใบ เขียนตัวเลขที่เป็นจำนวนบวกกำกับไว้ 6 ใบ และที่เป็นจำนวนลบกำกับไว้ 8 ใบ ถ้าจับสลากขึ้นมา 4 ใบ จงหาความน่าจะเป็นที่ผลคูณของตัวเลขในสลากทั้งสี่ใบนั้นจะเป็นจำนวนบวก

....

....

....

....

....

8. ในการทอดลูกเต๋าสองลูกพร้อมกัน จงหาความน่าจะเป็นที่ผลรวมของแต้มมากกว่า 5

....

....

....

....

....

....

9. จากการสำรวจเยาวชนกลุ่มหนึ่งเกี่ยวกับกิจกรรมที่ชอบ พบว่า เป็นดังนี้

ชมภาพยนต์ 190 คน ฟังเพลง 190 คน อ่านหนังสือ 190 คน ชมภาพยนต์และฟังเพลง 130 คน ฟังเพลงและอ่านหนังสือ 120 คน อ่านหนังสือและชมภาพยนต์ 110 คน ชมภาพยนต์และฟังเพลงและอ่านหนังสือ 70 คน

ถ้าสุ่มเยาวชนดังกล่าวขึ้นมา 1 คน จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้เยาวชนที่อ่านหนังสือ เพียงอย่างเดียว

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

10. จากการสำรวจใบลงทะเบียนของนักศึกษาในมหาวิทยาลัยแห่งหนึ่ง พบว่า มีนักศึกษา

60 คน เลือกเรียนภาษาอังกฤษ
20 คน เลือกเรียนภาษาฝรั่งเศส
10 คน เลือกเรียนภาษาเยอรมัน
15 คน เลือกเรียนทั้งภาษาอังกฤษและภาษาฝรั่งเศส
7 คน เลือกเรียนทั้งภาษาอังกฤษและภาษาเยอรมัน
3 คน เลือกเรียนทั้งภาษาฝรั่งเศสและภาษาเยอรมัน
3 คน เลือกเรียนทั้งสามภาษา

ถ้าสุ่มใบลงทะเบียนขึ้นมา 1 ใบ จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้ใบลงทะเบียนของนักศึกษาที่เลือกเรียนภาษาอังกฤษหรือภาษาฝรั่งเศสหรือภาษาเยอรมัน

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

11. จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้ว่าเป็นจริงหรือไม่

..............(1) การทดลองซึ่งสามารถพยากรณ์ผลลัพธ์ได้อย่างถูกต้องแน่นอนไม่ถือเป็นการทดลองสุ่ม

.... (2) เหตุการณ์ใด ๆ อาจจะประกอบด้วยสมาชิกทั้งหมดที่มีอยู่ในแซมเปิลสเปซก็ได้

.... (3) ถ้า S = { ก, ข, ค, ง, จ, ฉ, ช } , E_1 = { ข, ง, ฉ } และ E_2 = { ก, ค, จ } แล้ว E_1 และ E_2 เป็นเหตุการณ์ที่ไม่เกิดร่วมกัน

.... (4) ถ้าแซมเปิลสเปซ S ประกอบด้วยเหตุการณ์สองเหตุการณ์เท่านั้น และเหตุการณ์ทั้งสองเป็นเหตุการณ์ที่ไม่เกิดร่วมกัน คอมพลีเมนต์ของเหตุการณ์หนึ่ง คือเหตุการณ์ที่เหลือ

.... (5) ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ใด ๆ จะมีค่าเท่าไรก็ได้ ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับจำนวนสมาชิกของเหตุการณ์นั้น และจำนวนสมาชิกที่เป็นไปได้ทั้งหมดในการทดลองสุ่ม

.... (6) ถ้า S เป็นแซมเปิลสเปซ ของการทดลองสุ่มแล้ว $P(S)=1$

.... (7) ถ้า E_1 และ E_2 เป็นเหตุการณ์ใด ๆ ที่อยู่ในแซมเปิลสเปซ S แล้ว
$P(E_1 \cup E_2) + P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2)$

.... (8) ความน่าจะเป็นในการที่ผู้ซื้อสลากกินแบ่งหนึ่งใบจะถูกรางวัลเลขท้ายสองตัวเท่ากับ 0.01

.... (9) ถ้าความน่าจะเป็นที่โรงเรียนแห่งหนึ่งจะชนะในการแข่งขันฟุตบอล เท่ากับ $\frac{1}{2}$ แล้ว ความน่าจะเป็นที่โรงเรียนแห่งนั้นจะแพ้เท่ากับ $\frac{1}{2}$

.... (10) ความน่าจะเป็นของคอมพลีเมนต์ของเหตุการณ์หนึ่งอาจจะมีค่าเท่ากับ 0 ก็ได้